

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
Institut für Automatisierungstechnik

Fakultät für Informatik
Institut für Wissens- und Sprachverarbeitung



Bachelorarbeit

Entwicklung eines dynamischen Modells und Parameterschätzung für den FINken 3 Quadkopter

Erstprüfer: Prof. Dr. Sanaz Mostaghim
Zweitprüfer: Prof. Dr. Achim Kienle
Betreuer: Dipl.-Inform. Christoph Steup
M. Sc. Carsten Seidel

eingereicht: 31. März 2016

von: Anni Heckert
Mat.-Nr. 191463
geboren am 16. März 1989
in Magdeburg



Erklärung

Hiermit erkläre ich, Anni Heckert, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Magdeburg, den 31. März 2016,

(Unterschrift)

Kurzreferat

Diese Arbeit behandelt die Herleitung eines Modells für den Quadkopter FINken 3. Dabei werden die translatorischen Gleichungen mit dem Prinzip von D'Alembert modelliert, während für die rotatorischen Gleichungen Drehimpulsbilanzen genutzt werden. Es werden neben den elementaren Bewegungen auch der Luftwiderstand und die Form und Dichte des Quadkopters berücksichtigt.

Diese Gleichungen werden analytisch, sumilativ und praktisch evaluiert. Für die Antriebsgleichung der Schübe wird die strukturelle Identifizierbarkeit mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate und der Profile Likelihood- Methode geprüft, um die Motorkonstante zu bestimmen.

Abstract

This thesis deals with the derivation of a model for the quadcopter FINken 3. The translational equations are modeled with the principle of D'Alembert, while for the rotational equations angular momentum balance equations are used. In addition to the elementary movements the air resistance and the shape and density of the quadcopter are also taken into account .

These equations are evaluated analytically, sumilative and practically. For the equation for thrust forces structural identifiability is tested using least squares and the profile likelihood method to determine the motor constant.

Formelzeichen- und Abkürzungen

A_C	Dem Wind ausgesetzte Fläche	[m ²]
A_p	Fläche der Propeller	[m ²]
A, B, C, D	Motoren	[-]
c_t	Motorkonstante	[-]
c_w	Luftwiderstandsbeiwert	[-]
F_M	Gesamtschub aller Motoren	[N]
F_i	Schub der einzelnen Motoren, $i=\{A,B,C,D\}$	[N]
g	Erdbeschleunigung	9,81 [ms ⁻²]
J_{ij}	Massenträgheitsmoment, $i,j=\{x,y,z\}$	[kg m ²]
l	Abstand zwischen Rotor und Massenschwerpunkt	[m]
L	Drehimpuls	[Nms]
m	Masse des Quadkopters	[kg]
M	Drehmoment	[Nm]
r_p	Radius der Propeller	[m]
R_{sp}	Schwerpunkt	[m]
T	Gesamttransformationsmatrix	[-]
T_i	Transformationsmatrix für eine Achse, $i=\{x,y,z\}$	[-]
v	Translatorische Geschwindigkeit	[m ^{s-1}]
w	Kreuzproduktmatrix	[-]
x,y,z	Körpereigenes Koordinatensystem	[-]
X,Y,Z	Erdfestes Koordinatensystem	[-]
ϕ	Winkel bei Rotation um die x- Achse	[°]
θ	Winkel bei Rotation um die y- Achse	[°]
ψ	Winkel bei Rotation um die z- Achse	[°]
ω	Winkelgeschwindigkeit des Quadkopters	[s ⁻¹]

ω_p	Winkelgeschwindigkeit der Propeller	$[s^{-1}]$
ρ_L	Dichte der Luft	$[kg\ m^{-3}]$
\cdot	Erste Ableitung nach der Zeit	variabel
\cdot	Zweite Ableitung nach der Zeit	variabel

Inhaltsverzeichnis

Erklärung.....	i
Kurzreferat.....	ii
Abstract.....	ii
Formelzeichen- und Abkürzungen.....	iii
1. Einleitung.....	1
1.1. Beschreibung des FINken 3.....	1
1.2. Ziel der Arbeit.....	1
1.3. Stand der Technik.....	2
1.3.1. Bereits existierende Modelle	2
a) Bouabdallah, Samir: Design and Control of Quadrotors with Application to Autonomous Flying.....	2
b) Kim, Jinhyun; Kang, Min- Sung; Park, Sangdeok: Accurate Modeling and Robust Hovering Control for a Quad- rotor VTOL Aircraft.....	3
c) Goel, Rahul; Shah, Sapan M.; Gupta, Nitin K.; Ananthkrishnan, N.: Modeling Simulation and Flight Testing of an Autonomous Quadrotor.....	3
d) Puls, Tim: Lokalisations- und Regelungsverfahren für einen 4- Rotor- Helikopter.....	4
2. Hauptteil.....	4
2.1. Grundlagen.....	4
2.1.1. Modellierungsverfahren für translatorische Gleichungen.....	5
2.1.2. Modellierungsverfahren für rotatorische Gleichungen	5
2.1.3. Die Transformationsmatrix.....	6
2.1.4. Strukturelle Identifizierbarkeit mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate und des Profile Likelihood- Verfahrens.....	6
a) Methode der kleinsten Quadrate.....	6
b) Profile Likelihood- Methode.....	7
2.2. Modellierung des FINken 3.....	8
2.2.1. Generelle Struktur des Modells.....	8
2.2.2. Annahmen und Grundlagen für die Modellierung.....	9
a) elementare Bewegungen.....	9
b) Luftwiderstand.....	9
c) Form und Dichte.....	9
2.2.3. Translation.....	11
2.2.3.1. Elementare Bewegungen.....	11
2.2.3.2. Luftwiderstand.....	12
2.2.3.3. Form und Dichte.....	12
2.2.4. Rotation	13
2.2.4.1. Elementare Bewegungen.....	13
2.2.4.2. Luftwiderstand.....	14
2.2.4.3. Form und Dichte.....	14
2.2.5. Vollständiges Modell.....	18
2.3. Evaluation.....	19
2.3.1. Analytisch.....	19
a) Ruhelage.....	19
b) Quadkopter steigt gerade nach oben.....	20
c) Quadkopter fliegt nach rechts in die positive x- Richtung.....	21
d) Quadkopter fliegt nach vorne in positive y- Richtung.....	22
2.3.2. Simulativ.....	23
a) Quadkopter fliegt nach rechts in positive x- Richtung.....	23
b) Quadkopter fliegt nach vorne in positive y- Richtung.....	26

c) Quadkopter giert.....	28
d) Quadkopter steigt auf neue konstante Höhe	31
2.3.3. Praktisch.....	33
2.3.4. Strukturelle Identifizierbarkeit der Antriebsgleichung.....	37
3. Schlussteil.....	39
3.1. Zusammenfassung.....	39
3.2. Ausblick.....	40
Verzeichnisse.....	v
A Anhang.....	vii
Herleitung der Transformationsmatrix.....	vii
Maße und Gewichte des Quadkopters.....	viii
Zwischenergebnisse für die Massenträgheitsmomente.....	ix
Ergebnisse der Normierung für die strukturelle Identifizierbarkeit.....	x

1. Einleitung

1.1. Beschreibung des FINken 3

Quadkopter sind Drehflügler mit vier Rotoren, die entweder in x- oder +- Konfiguration angeordnet sein können. Dabei haben die jeweils gegenüberliegenden Rotoren die gleiche Drehrichtung, entgegengesetzt zum anderen Rotorenpaar, sodass sich bei gleichem Schub die Drehmomente ausgleichen.

Der FINken 3 ist ein Quadkopter in x- Konfiguration, der für den Flugbetrieb im Innenbereich konzipiert ist. Er hat eine Gesamtlänge und -breite von jeweils 17cm und eine Gesamthöhe von 11,3cm mit einem Gesamtgewicht von 387g.



Abbildung 1: Der Quadkopter 'FINken 3'

Er ist mit einem Infrarotsensor zur Bestimmung der Flughöhe und vier Ultraschallsensoren für die Entfernungsmessung in der Horizontalen ausgestattet. Diese Sensorik und die im Quadkopter verbaute Rechentechnik sorgen dafür, dass er zu autonomen Flügen fähig ist. Aufgrund des Inneneinsatzes wurde auf GPS und einen barometrischen Höhensensor, wie es bei Quadkoptern die im Außenbereich geflogen werden üblich ist, verzichtet.

Er basiert auf einer Paparazzi UAV Plattform und ist frei programmierbar, was insbesondere für die Verwendung zur Erforschung der Schwarmintelligenz wichtig ist.

1.2. Ziel der Arbeit

Das Ziel der Arbeit ist es, ein dynamisches Modell für den Quadkopter Finken 3 zu entwickeln, welches die translatorischen und rotatorischen Bewegungen möglichst realistisch simuliert. Um dies zu erreichen sollen neben den elementaren Bewegungen auch der Luftwiderstand und die Form mit in die Berechnungen einfließen.

Zusätzlich soll die strukturelle Identifizierbarkeit der Parameter überprüft werden.

Im Anschluss werden die Daten aus der auf dem Modell beruhenden Simulation mit den Daten, die während Flügen des realen Quadkopters aufgezeichnet wurden, verglichen.

1.3. Stand der Technik

Für den FINken 3 existieren bisher keine Modelle, allerdings existieren vereinfachte für das Vorgängermodell FINken 2.

Es wurde im Rahmen der Reglerauslegung ein linearisiertes Modell für die translatorischen Bewegungen entwickelt {Pahlke 2015 #19I: 20}.

Des Weiteren existiert eine Simulation, die auf der Annahme des Schubes als Teilchenstrom beruht.

Ein genaues, nicht lineares Modell, welches sowohl Translation als auch Rotation beschreibt, existiert jedoch für keinen Quadkopter der FINken- Reihe. Beispiele für derartige Modelle, die für anderen Quadkopter entwickelt wurden, finden sich in der Literatur.

1.3.1. Bereits existierende Modelle

Die in der für diese Arbeit verwendeten Literatur genutzten Modelle weisen in ihrer grundsätzlichen Struktur viele Ähnlichkeiten, jedoch auch einige Unterschiede auf.

Gemein ist allen, dass sie die Matrix der Massenträgheitsmomente als diagonal annehmen.

a) Bouabdallah, Samir: Design and Control of Quadrotors with Application to Autonomous Flying

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{xx}\ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi}(I_{yy} - I_{zz}) + J_r\dot{\theta}\Omega_r + l(-T_2 + T_4) - h\left(\sum_{i=1}^4 H_{yi}\right) + (-1)^{i+1} \sum_{i=1}^4 R_{mxi} \\ I_{yy}\ddot{\theta} = \dot{\phi}\dot{\psi}(I_{zz} - I_{xx}) - J_r\dot{\phi}\Omega_r + l(T_1 - T_3) + h\left(\sum_{i=1}^4 H_{xi}\right) + (-1)^{i+1} \sum_{i=1}^4 R_{myi} \\ I_{zz}\ddot{\psi} = \dot{\theta}\dot{\phi}(I_{xx} - I_{yy}) + J_r\dot{\psi}\Omega_r + (-1)^i \sum_{i=1}^4 Q_i + l(H_{x2} - H_{x4}) + l(-H_{y1} + H_{y3}) \\ m\ddot{z} = mg - (c\psi c\phi) \sum_{i=1}^4 T_i \\ m\ddot{x} = (s\psi s\phi + c\psi s\theta c\phi) \sum_{i=1}^4 T_i - \sum_{i=1}^4 H_{xi} - \frac{1}{2}C_x A_c \rho \dot{x} |\dot{x}| \\ m\ddot{y} = (-c\psi s\phi + s\psi s\theta c\phi) \sum_{i=1}^4 T_i - \sum_{i=1}^4 H_{yi} - \frac{1}{2}C_y A_c \rho \dot{y} |\dot{y}| \end{array} \right.$$

{Bouabdallah 2007 #2: 24}

Bouabdallah verwendet ein recht ausführliches Modell, das neben den grundsätzlichen Bewegungsgleichungen auch den Luftwiderstand und die vertikale Distanz zwischen den Rotoren und dem Massenmittelpunkt berücksichtigt. Allerdings ist es für einen Quadkopter in +- Konfiguration ausgelegt ist und somit nicht direkt auf den FINken 3 übertragbar.

1.3.1. Bereits existierende Modelle

b) Kim, Jinhyun; Kang, Min- Sung; Park, Sangdeok: Accurate Modeling and Robust Hovering Control for a Quad- rotor VTOL Aircraft

$$\begin{cases} m\ddot{x} = (s\psi s\phi + c\psi c\phi s\theta)u_1 \\ m\ddot{y} = (-c\psi s\phi + s\theta s\psi c\phi)u_1 \\ m(\ddot{z} + g) = c\theta c\phi u_1 \\ I_{xx}\dot{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z = u_2, \\ I_{yy}\dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz})\omega_z\omega_x = u_3, \\ I_{zz}\dot{\omega}_z = u_4. \end{cases}$$

{Kim 2010 #17: 15}

In dieser Arbeit wird ein vereinfachtes Modell genutzt, in dem nur die grundsätzlichen Bewegungsgleichungen verwendet werden. Der Luftwiderstand wird nicht berücksichtigt. Die Eingänge u_i stehen dabei für die jeweiligen Schubvektoren.

Auch dieses Modell ist für einen Quadkopter in +- Konfiguration ausgelegt und somit nicht auf den FINken 3 übertragbar.

c) Goel, Rahul; Shah, Sapan M.; Gupta, Nitin K.; Ananthkrishnan, N.: Modeling, Simulation and Flight Testing of an Autonomous Quadrotor

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \\ \ddot{z}_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \omega_{x_b} \\ \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{F_{wI}}{m} - \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{m} A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_{x_b} \\ \dot{\omega}_{y_b} \\ \dot{\omega}_{z_b} \end{bmatrix} = -J^{-1}\omega \times J \begin{bmatrix} \omega_{x_b} \\ \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} \end{bmatrix} - J^{-1}(M_f + \tau_d + M_g) + J^{-1} \begin{bmatrix} L(T_4 - T_2) \\ L(T_1 - T_3) \\ D_1 - D_2 + D_3 - D_4 + I_{ct} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\text{where, } \omega \times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_b} & \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} & 0 & -\omega_{x_b} \\ -\omega_{y_b} & \omega_{x_b} & 0 \end{bmatrix}$$

{Goel 2009 #3}

1.3.1. Bereits existierende Modelle

Hier findet ein ausführliches Modell Anwendung, welches neben dem Luftwiderstand auch mögliche Störungen berücksichtigt. Allerdings ist es wiederum für einen Quadcopter in +- Konfiguration entwickelt worden, sodass es nicht direkt auf den FINken 3 übertragen werden kann.

d) Puls, Tim: Lokalisations- und Regelungsverfahren für einen 4- Rotor- Helikopter

$$I_{xx} \cdot \ddot{\phi} = l \cdot (u_2 - c_{D4} \cdot \dot{\phi}^2) - (I_{xx} - I_{yy})\dot{\theta}\dot{\psi} + \dot{\theta} \cdot I_z^{rot} \cdot \Omega_z$$

$$I_{yy} \cdot \ddot{\theta} = l \cdot (u_3 - c_{D5} \cdot \dot{\theta}^2) - (I_{yy} - I_{zz})\dot{\psi}\dot{\phi} + \dot{\phi} \cdot I_z^{rot} \cdot \Omega_z$$

$$I_{zz} \cdot \ddot{\psi} = u_4 - c_{D5} \cdot \dot{\psi}^2 - (I_{yy} - I_{xx})\dot{\phi}\dot{\theta}$$

Rotations-Differentialgleichungen

$$m \cdot \ddot{x}_g = u_1 \cdot (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) - c_{D1} \cdot \dot{x}_g^2 - (w_y \dot{z}_g - w_z \dot{y}_g)$$

$$m \cdot \ddot{y}_g = u_1 \cdot (\cos \phi \sin \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi) - c_{D2} \cdot \dot{y}_g^2 - (w_z \dot{x}_g - w_x \dot{z}_g)$$

$$m \cdot \ddot{z}_g = u_1 \cdot (\cos \phi \cos \theta) - mg - c_{D3} \cdot \dot{z}_g^2 - (w_x \dot{y}_g - w_y \dot{x}_g)$$

Translations-Differentialgleichungen

{Puls 2011 #4}

Puls nutzt in seiner Arbeit ein ausführliches Modell, welches für einen Quadcopter in x- Konfiguration, also in der gleichen Art wie der FINken 3, entwickelt wurde. Allerdings entsprachen die Ergebnisse einer analytischen Evaluation des Modells nicht dem Erwartungsbild.

2. Hauptteil

2.1. Grundlagen

Der Modellierung wird ein kartesisches Rechtskoordinatensystem zugrunde gelegt, dessen z- Achse nach oben zeigt. Die genaue Anordnung von Achsen und Motoren kann Abbildung (2) entnommen werden.

2.1. Grundlagen

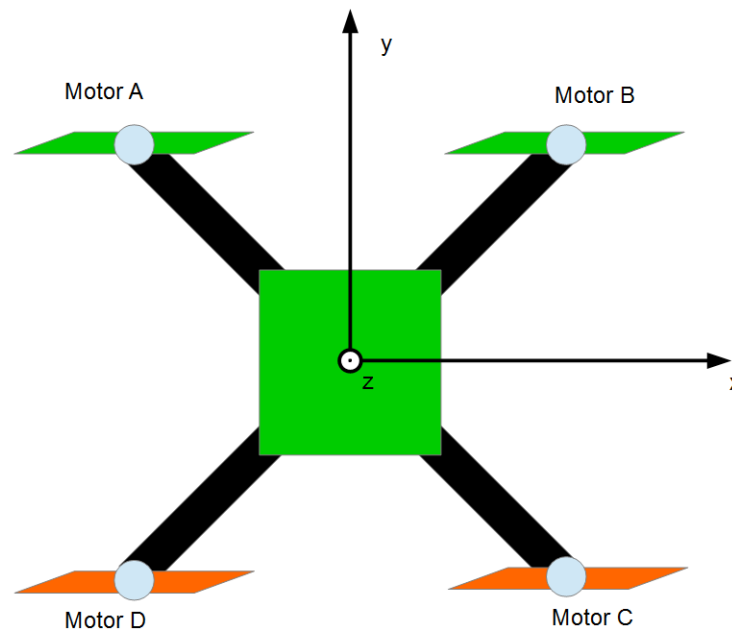


Abbildung 2: Schematischer Aufbau des FINken 3 von oben

Es werden folgende Annahmen getroffen:

- Der Aufbau des Quadkopters sei starr,
- Der Körperschwerpunkt fällt in den Ursprung des Koordinatensystems,
- Nick- und Rollwinkel befinden sich maximal im Bereich $\varphi, \theta \in [-20^\circ, 20^\circ]$.

2.1.1. Modellierungsverfahren für translatorische Gleichungen

Die translatorischen Gleichungen wurden in dieser Arbeit mit dem Prinzip von D'Alembert aufgestellt. Dank dieses Prinzips können für kinetische Probleme Gleichgewichtsbedingungen wie in der Statik genutzt werden. Dabei werden alle eingprägten Kräfte F_e , Zwangskräfte F_z , Widerstände F_w und negative Massenkräfte F_A , die auch d'Alembertsche Kräfte genannt werden, berücksichtigt.

$$F_e + F_z + F_w - F_A = 0 \quad (1)$$

Genauer zum Prinzip von D'Alembert und dessen Herleitung befindet sich im Buch „Technische Mechanik“ von Dankert {Dankert 2013 #20I: 520}.

2.1.2. Modellierungsverfahren für rotatorische Gleichungen

Für die Modellierung der rotatorischen Gleichungen gibt es zwei häufig verwendete Verfahren. Oft werden Lagrange- Gleichungen zweiter Art genutzt, wie sie zum Beispiel in der Arbeit von Bouabdallah angewandt wurden {Bouabdallah 2007 #2I: 97–103}.

2.1.2. Modellierungsverfahren für rotatorische Gleichungen

Für diese Arbeit wurden Drehimpulsbilanzen verwendet {Nolting 2007 #21I: 216}. Das Prinzip besteht dabei darin, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses der Summe der Drehmomente entspricht.

$$\frac{d}{dt} L = \sum_{i=1}^N M_i \quad (2)$$

2.1.3. Die Transformationsmatrix

Die Gesamttransformationsmatrix T wird für die Umrechnung zwischen körpereigenem und erdfestem Koordinatensystem benötigt. Sie ergibt sich aus den Einzeltransformationsmatrizen T_x , T_y und T_z , die die einzelnen Bewegungen um die jeweilige Achse beschreiben.

$$T = \begin{pmatrix} -\cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \theta \sin \varphi & \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \theta \sin \varphi & \cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta & -\cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (3)$$

Die genaue Herleitung dieser Matrix befindet sich im Anhang A.

2.1.4. Strukturelle Identifizierbarkeit mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate und des Profile Likelihood- Verfahrens

Identifizierbarkeit bedeutet, dass es theoretisch möglich ist, den Wert der im Modell vorkommenden Parameter zu bestimmen. Dieser Wert wird über die Methode der kleinsten Quadrate bestimmt.

Ein Parameter ist strukturell identifizierbar wenn sein Wert ein Minimum der Quadratfehlersumme (Formel (8)) ist. Dies kann mit der Profile Likelihood- Methode geprüft werden.

Dabei muss das System beobachtbar sein, das heißt es muss möglich sein, dessen Anfangszustand über einen bekannten Verlauf der Eingangs- und der Ausgangsgröße zu bestimmen {Lunze 2014 #26I: 91–107}.

a) Methode der kleinsten Quadrate

Bei der Methode der kleinsten Quadrate wird eine Kurve gesucht, die eine Reihe von Messpunkten möglichst genau abbildet.

Betrachtet wird eine Größe y , die von einer Größe x und gegebenenfalls einem oder mehreren Parametern abhängt.

$$y(x) = f(x, p_1, \dots) \quad (4)$$

Es wird für jedes Wertepaar eine Funktion gebildet:

$$f = (f(x_1, p), f(x_2, p), \dots) \quad (5)$$

Des Weiteren wird ein $\hat{y}(x)$ benötigt. Es besteht aus Messdaten, die zur Ermittlung z.B. der Parameter genutzt werden.

Aus diesen Daten wird der Fehler berechnet, indem die Differenz zwischen $y(x)$ und den Messdaten $\hat{y}(x)$ gebildet und quadriert wird.

2.1.4. Strukturelle Identifizierbarkeit mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate und des Profile Likelihood- Verfahrens

$$\chi^2(p) = \sum_{i=1}^n (f(x_i, p) - \hat{y}(x)_i)^2 \quad (6)$$

Danach soll ein Parameter p so bestimmt werden, dass diese quadrierte Fehlersumme minimal wird:

$$p = \min_p \chi^2 = \min_p \left(\sum_{i=1}^n (f(x_i, p) - \hat{y}(x)_i)^2 \right) \quad (7)$$

In dieser Arbeit geschieht die Minimierung über die MATLAB- Funktion `lsqnonlin` {Solve nonlinear least-squares nonlinear data-fitting #25I}.

b) Profile Likelihood- Methode

Die Profile Likelihood- Methode wird verwendet, um zu testen, ob der unter a) gefundene Parameter optimal ist oder ob es sich um ein lokales, aber kein globales Minimum handelt. Dadurch kann festgestellt werden, ob dieser Parameter strukturell identifizierbar ist. Dazu wird ein Parameter verändert, während die restlichen konstant gehalten werden. Es werden Werte, die um den berechneten Wert des Parameters liegen, getestet und ihre Fehlerquadrate minimiert.

$$\chi_{pl}^2(p) = \min_p (\chi^2(p)) \quad (8)$$

Werden die Ergebnisse grafisch dargestellt, so kann man anhand der Kurvenform erkennen, ob der Parameter strukturell identifizierbar ist (Abbildung (3)).

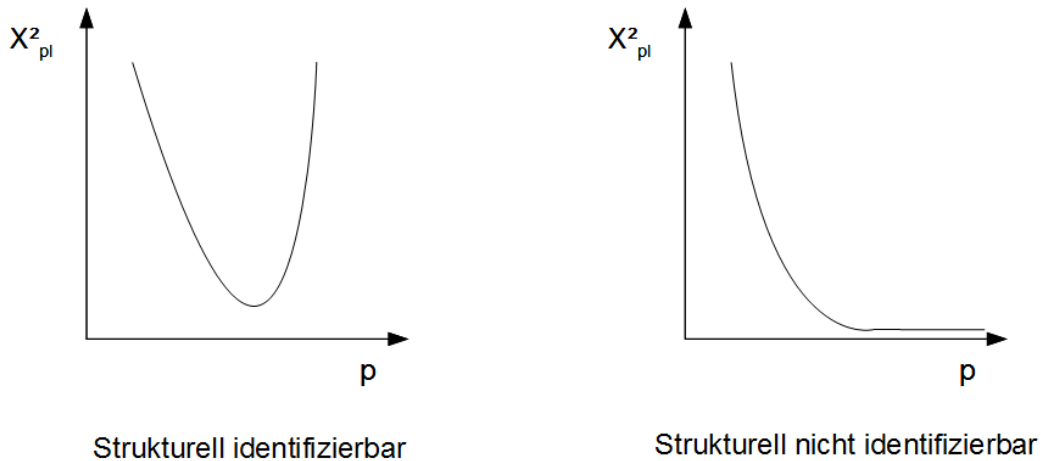


Abbildung 3: Bestimmung der strukturellen Identifizierbarkeit

Verfügt die Kurve des Fehlerfunktionals über ein Minimum und werden im weiteren Kurvenverlauf bestimmte Grenzen Δ_α überschritten, so ist der Parameter strukturell identifizierbar.

Für die Berechnung dieser Grenzen Δ_α wird die χ^2 - Verteilung genutzt. Der Vertrauensbereich setzt sich dabei folgendermaßen zusammen:

$$\{p | \chi^2(\hat{p}) - \chi^2(p) < \Delta_\alpha\} \quad \text{mit} \quad \Delta_\alpha = \chi^2(\alpha, n) \quad (9)$$

2.1.4. Strukturelle Identifizierbarkeit mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate und des Profile Likelihood- Verfahrens

Dabei steht α für das entsprechende Quantil der χ^2 - Verteilung und n für die Anzahl der Parameter {Raué 2009 #24I: 1924}.

Mit diesen Überlegungen lassen sich die Grenzen Δ_α aus Tabellen in der Literatur ablesen {Bronštejn 2008 #23I: 1145}.

2.2. Modellierung des FINken 3

2.2.1. Generelle Struktur des Modells

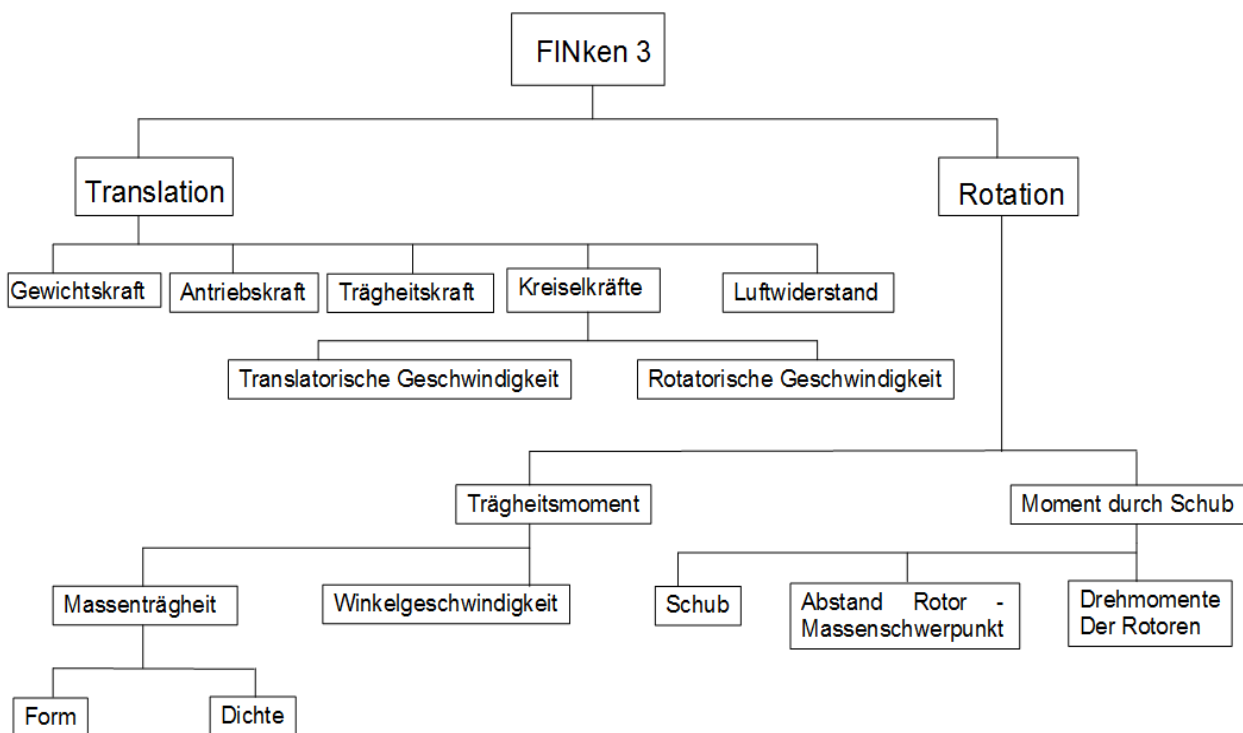


Abbildung 4: Generelle Struktur des Modells

Wie in Abbildung (4) zu sehen ist unterteilen sich die Bewegungen des Quadkopters in Translation und Rotation. Bei der Translation werden alle Punkte des Körpers um denselben Betrag in dieselbe Richtung verschoben, während sich bei der Rotation alle Punkte kreisförmig um dieselbe Achse bewegen.

Die translatorischen Bewegungen setzen sich aus der Gewichtskraft, der Antriebskraft, der Trägheitskraft, der Kreiselkräfte und dem Luftwiderstand zusammen. Dabei werden die Kreiselkräfte sowohl von der rotatorischen als auch von der translatorischen Geschwindigkeit beeinflusst.

Die rotatorischen Bewegungen setzen sich aus dem Trägheitsmoment und dem Moment aus den Schüben der Motoren zusammen. Das Trägheitsmoment berechnet sich dabei aus der Massenträgheit, die von der Form und Dichte abhängt, und der Winkelgeschwindigkeit. Der Moment durch Schub setzt sich aus drei Größen zusammen. Dies sind zum einen die Drehmomente der Rotoren und der Schub, den diese erzeugen. Des Weiteren wird er vom Abstand der Rotoren zum Massenschwerpunkt beeinflusst.

2.2.2. Annahmen und Grundlagen für die Modellierung

a) elementare Bewegungen

Für die Modellierung der elementaren Bewegungen wurde die Form des Quadkopters als Rechteck und damit die Matrix der Massenträgheitsmomente als diagonal angenommen:

$$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix} . \quad (10)$$

Bei der Berücksichtigung der Form und Dichte für die rotatorischen Gleichungen in Kapitel [2.2.4.3.](#) wird sich zeigen, dass diese Annahme auch für den Quadkopter gilt.

Wie sich weiterhin im Laufe der Herleitung zeigen wird und auch in Abbildung (4) zu sehen ist werden die translatorischen Bewegungen auch von der rotatorischen Geschwindigkeit beeinflusst, was bedeutet, dass Kopplungen zwischen den elementaren Bewegungen auftreten.

b) Luftwiderstand

Für den Luftwiderstand F_{WL} wurde die allgemeine Formel verwendet:

$$F_{WL} = \frac{1}{2} c_w A_C \rho_L v^2 . \quad (11)$$

c) Form und Dichte

Um die Form des Quadkopters in das Modell zu integrieren, wurde eine vereinfachte Struktur gewählt, bei der die einzelnen Teile als Blöcke angenommen wurden. Dabei wird angenommen, dass die Dichte im jeweiligen Quader konstant ist. Der Rumpf wurde in einen unteren und einen oberen Block eingeteilt, die Arme vom Rumpf bis zum Motor stellen jeweils einen Quader dar und die einzelnen Motorblöcke wurden ebenfalls jeweils als Block modelliert (Abbildung (5)). Der Quadkopter wurde als starrer Körper betrachtet.

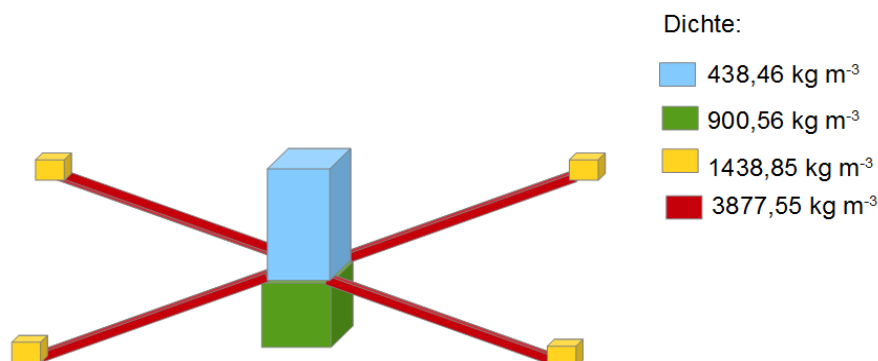


Abbildung 5: Modell des Quadkopters in Blockstruktur

Zur Bestimmung der einzelnen Dichten wurde der FINken 3 in die einzelnen Blöcke zerlegt und diese vermessen und gewogen. Die genauen Maße und Gewichte befinden sich im Anhang A.

2.2.2. Annahmen und Grundlagen für die Modellierung

Mit diesen Werten ergeben sich nach der allgemeinen Formel $V=l \cdot b \cdot h$ die Volumina und mit diesen Werten auch die Dichten für die einzelnen Quader.

Oberer Block	Volumen	$V_o = 2,25792 \cdot 10^{-4} m^3$	
	Dichte	$\rho_o = \frac{m}{V_o} = 438,46 \frac{kg}{m^3}$	(12)

Unterer Block	Volumen	$V_U = 1,46575 \cdot 10^{-4} m^3$	
	Dichte	$\rho_U = \frac{m}{V_U} = 900,56 \frac{kg}{m^3}$	(13)

Arme	Volumen	$V_A = 4,9 \cdot 10^{-6} m^3$	
	Dichte	$\rho_A = \frac{m}{V_A} = 3877,55 \frac{kg}{m^3}$	(14)

Motorblock	Volumen	$V_M = ,39 \cdot 10^{-5} m^3$	
	Dichte	$\rho_M = \frac{m}{V_M} = 1438,85 \frac{kg}{m^3}$	(15)

Des Weiteren wurde der Schwerpunkt R_{sp} des Quadkopters ermittelt. Dazu wurden die Schwerpunkte der einzelnen Blöcke mittels Volumenintegral errechnet und gewichtet addiert:

$$R_{sp} = \begin{bmatrix} x_{sp} \\ y_{sp} \\ z_{sp} \end{bmatrix} = \frac{1}{M} \int_K \vec{v} dm = \frac{1}{M} \int_K \vec{r} \rho dV \quad . \quad (16)$$

M steht dabei für die jeweilige Masse.

Mit Formel (16) ergibt sich ein Schwerpunkt $R_{sp} = \begin{bmatrix} x_{sp} \\ y_{sp} \\ z_{sp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,00094 \text{ cm} \end{bmatrix} \quad .$

Damit befindet sich der Schwerpunkt sowohl in x- als auch in y- Richtung genau im angenommenen Mittelpunkt, während er in z- Richtung verschoben. Diese Abweichung entspricht 0,832% der Gesamthöhe des Quadkopters. Wird nun noch eine Betrachtung der Messabweichung durchgeführt und dabei der Größtfehler Δx berechnet, der sich aus systematischem Δx_s und zufälligem Fehler Δx_z zusammensetzt, so erkennt man, dass diese Abweichung im Bereich der Fehlertoleranz liegt. Für den zufälligen Fehler wird bei einmaliger Messung pauschal ein halber Skalenteilungswert angesetzt.

2.2.2. Annahmen und Grundlagen für die Modellierung

$$\Delta x = \Delta x_s + \Delta x_z = (0,5 + 0,5) \text{ mm} = 1 \text{ mm} \quad (17)$$

Dementsprechend wird sie als vernachlässigbar angenommen, sodass für diese Arbeit der Schwerpunkt des Quadkopters mit dem Koordinatenursprung überein stimmt.

$$R_{sp} = \begin{bmatrix} x_{sp} \\ y_{sp} \\ z_{sp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

2.2.3. Translation

2.2.3.1. Elementare Bewegungen

In den elementaren translatorischen Bewegungen spielen die Gewichtskraft F_G , die Antriebskraft $F_{M,G}$, die Trägheits- oder auch d'Alembertsche Kraft F_A und die Kreiselkräfte F_K eine Rolle.

Gewichtskraft	$F_G = -mg \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	(19)
---------------	---	------

Antriebskraft	$F_{M,G} = F_M T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ mit $F_M = \sum_{i=A}^D F_{M,i}$	(20)
---------------	--	------

Trägheits- oder d'Alembertsche Kraft	$F_A = -ma$ mit $a = \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix}$	(21)
--------------------------------------	--	------

Kreiselkräfte	$F_K = m \left[\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} \right]$	(22)
---------------	--	------

Leitet man aus diesen Formeln gemäß Kapitel 2.1.1. die Gleichgewichtsbeziehungen über das D'Alembertsche Prinzip her, so ergibt sich:

$$0 = -mg \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + F_M T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - m \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} + m \left[\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} \right] \quad (23)$$

2.2.3. Translation

Setzt man nun für T die Gesamttransformationsmatrix aus Kapitel 2.1.3. ein erhält man nach einigen Umformungen die Gleichungen für die elementaren translatorischen Bewegungen.

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} - g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{F_M}{m} \begin{bmatrix} \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (24)$$

2.2.3.2. Luftwiderstand

In Formel (11) ist zu erkennen, aus welchen Elementen sich der Luftwiderstand für die translatorische Bewegung zusammensetzt. Der Luftwiderstandsbeiwert wurde wie in {Pahlke 2015 #19I: 16} abgeschätzt.

Luftwiderstandsbeiwert,
abgeschätzt {Becker 2013 #1I: 75} $c_w = 0,7$ (25)

Dem Wind ausgesetzte Fläche $A_C = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$ (26)

Dichte der Luft bei Raumtemperatur (15°C)
und p= 101325 Pa {Czichos 2008 #22I: 244} $\rho_L = 1,225 \frac{kg}{m^3}$ (27)

Translatorische Geschwindigkeit $v^2 = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix}^2$ (28)

Damit ergibt sich die Formel für den Luftwiderstand für die translatorischen Bewegungen:

$$F_{WL} = \frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \cdot 1,225 \frac{kg}{m^3} \cdot \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix}^2 \quad (29)$$

2.2.3.3. Form und Dichte

Bei den translatorischen Gleichungen hat die Form des Quadkopters nur für den Luftwiderstand eine Bedeutung. Dort beeinflusst sie die dem Wind ausgesetzte Fläche. Diese wurde mit den Maßen aus Anhang A berechnet.

2.2.3. Translation

Die dem Wind ausgesetzte Fläche in x- Richtung	$A_x = 7,985 \cdot 10^{-3} m^2$	(30)
--	---------------------------------	------

Die dem Wind ausgesetzte Fläche in y- Richtung	$A_y = 7,575 \cdot 10^{-3} m^2$	(31)
--	---------------------------------	------

Die dem Wind ausgesetzte Fläche in z- Richtung	$A_z = 1,2672 \cdot 10^{-2} m^2$	(32)
--	----------------------------------	------

Setzt man die Ergebnisse (30) bis (32) in die Formel (29) ein, so erhält man für den Luftwiderstand unter Berücksichtigung der Form des Quadkopters:

$$F_{wL} = \frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot \begin{bmatrix} 7,985 \cdot 10^{-3} m^2 \\ 7,575 \cdot 10^{-3} m^2 \\ 1,2672 \cdot 10^{-2} m^2 \end{bmatrix} \cdot 1,225 \frac{kg}{m^3} \cdot \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix}^2 \quad (33)$$

2.2.4. Rotation

2.2.4.1. Elementare Bewegungen

Die elementaren rotatorischen Bewegungen setzen sich aus der Drehung um die x- Achse mit dem Winkel ϕ , dem Nicken, der Drehung um die y- Achse mit dem Winkel θ , dem Rollen, und der Drehung um die z- Achse mit dem Winkel ψ , dem Gieren, zusammen.

Diese Rotationen ergeben sich aus den Drehmomenten M_s , die durch den Schub ausgelöst werden und den Trägheitsmomenten M_T . Die Drehmomente M_s berechnen sich dabei für die x- und y- Richtung aus dem Produkt von Kraft und Hebelarm, in z- Richtung aus der Summe der Drehmomente der einzelnen Rotoren.

Aus der Anordnung der Achsen und Motoren (Abbildung (2)) lässt sich herleiten, wie die Motoren für die jeweilige Bewegung angesteuert werden müssen. Für eine Drehung um die x- Achse wird der Schub der Motoren C und D vergrößert bzw. der der Motoren A und B verringert. Soll der Quadkopter rollen, so muss der Schub der Motoren A und D vergrößert bzw. der der Motoren B und C verringert werden. Die Rotation um die z- Achse ergibt sich aus den Drehmomenten der Rotoren. Gleichen sich diese nicht, wie in Kapitel 1.1. beschrieben, aus, so beginnt der Quadkopter zu gieren.

Der Einfluss der Trägheitsmomente wird durch die Multiplikation der Kreuzproduktmatrix w {Bronštejn 2008 #23I: 188–192} mit der Matrix der Massenträgheitsmomente J und dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit ω modelliert.

Drehmomente durch Schub	$M_s = F \cdot l = \begin{bmatrix} ((F_C + F_D) - (F_A + F_B))l \\ ((F_A + F_D) - (F_B + F_C))l \\ -D_A + D_B - D_C + D_D \end{bmatrix} \quad (34)$	
-------------------------	---	--

2.2.4. Rotation

Trägheitsmomente

$$M_T = wJ \omega = \begin{bmatrix} (J_{zz} - J_{yy}) \dot{\theta} \dot{\psi} \\ (J_{xx} - J_{zz}) \dot{\phi} \dot{\psi} \\ (J_{yy} - J_{xx}) \dot{\phi} \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\text{mit } w = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\psi} & \dot{\theta} \\ \dot{\psi} & 0 & -\dot{\phi} \\ -\dot{\theta} & \dot{\phi} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Formeln (34) und (35) werden in die Formel (2) aus Kapitel 2.1.2. eingesetzt:

$$\frac{d}{dt} L = \frac{d}{dt} \left(J \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right) = J \cdot \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} (J_{zz} - J_{yy}) \dot{\theta} \dot{\psi} \\ (J_{xx} - J_{zz}) \dot{\phi} \dot{\psi} \\ (J_{yy} - J_{xx}) \dot{\phi} \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ((F_C + F_D) - (F_A + F_B)) l \\ ((F_A + F_D) - (F_B + F_C)) l \\ -D_A + D_B - D_C + D_D \end{bmatrix}, \quad (36)$$

wodurch sich ergibt:

$$J \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (J_{zz} - J_{yy}) \dot{\theta} \dot{\psi} \\ (J_{xx} - J_{zz}) \dot{\phi} \dot{\psi} \\ (J_{yy} - J_{xx}) \dot{\phi} \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ((F_C + F_D) - (F_A + F_B)) l \\ ((F_A + F_D) - (F_B + F_C)) l \\ -D_A + D_B - D_C + D_D \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Damit ergeben sich nach kurzer Umformung die Gleichungen für die elementaren rotatorischen Gleichungen:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(J_{zz} - J_{yy}) \dot{\theta} \dot{\psi}}{J_{xx}} \\ \frac{(J_{xx} - J_{zz}) \dot{\phi} \dot{\psi}}{J_{yy}} \\ \frac{(J_{yy} - J_{xx}) \dot{\phi} \dot{\theta}}{J_{zz}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{((F_C + F_D) - (F_A + F_B)) l}{J_{xx}} \\ \frac{((F_A + F_D) - (F_B + F_C)) l}{J_{yy}} \\ \frac{-D_A + D_B - D_C + D_D}{J_{zz}} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

2.2.4.2. Luftwiderstand

Aufgrund der geringen Auslenkungen des Quadkopters wurde der Einfluss des Luftwiderstands bei der rotatorischen Bewegung als vernachlässigbar angenommen.

2.2.4.3. Form und Dichte

Form und Dichte beeinflussen die rotatorischen Bewegungen ausschließlich über die Massenträgheitsmomente. Diese werden in Matrix-Form dargestellt:

2.2.4. Rotation

$$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} .$$

Die einzelnen Elemente wurden nach der allgemeinen Formel berechnet:

$$J = \int_V r \rho dV = \rho \iiint_{zyx} r dx dy dz . \quad (39)$$

Dabei stellt r den Abstand vom Ursprung dar. Da die einzelnen Teile des Quadkopters als Quader angenommen wurden setzt r sich folgendermaßen zusammen:

$$r = \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} . \quad (40)$$

Die Massenträgheitsmomente wurden jeweils blockweise berechnet und dann addiert. Die Einteilung der Integrationsgrenzen wird in Abbildung (6) ersichtlich.

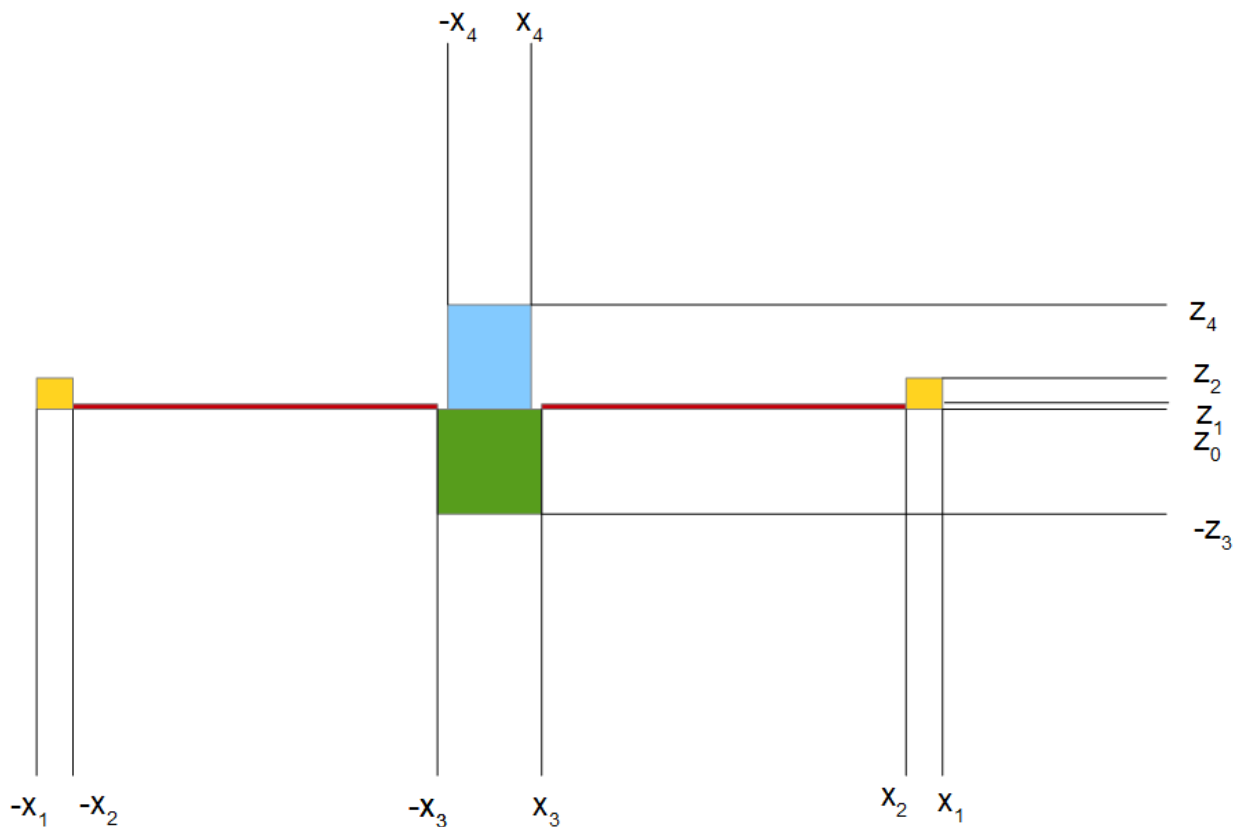


Abbildung 6: Einteilung der Integrationsgrenzen

Daraus ergeben sich folgende Werte.

$$x_1 = 0,085 \text{ m}$$

$$z_0 = 0 \text{ m}$$

2.2.4. Rotation

$x_2=0,0643\text{m}$	$z_1=0,003\text{m}$
$x_3=0,0275\text{m}$	$z_2=0,0218\text{m}$
$x_4=0,028\text{m}$	$-z_3=-0,041\text{m}$
	$z_4=0,072\text{m}$

Da die Arme und Motorblöcke des Quadkopters nicht achsparallel angeordnet sind ergibt sich für deren Integrationsgrenzen in y- Richtung jeweils eine Formel statt eines Zahlenwertes. Es sind jeweils vier Gleichungen zur vollständigen Beschreibung nötig.

Motorblock	$y_1=(-x-0,01387)\text{m}$
	$y_2=(-x+0,01387)\text{m}$
	$y_3=(x-0,01387)\text{m}$
	$y_4=(x+0,01387)\text{m}$
Arme	$y_5=(-x-0,01237)\text{m}$
	$y_6=(-x+0,01237)\text{m}$
	$y_7=(x-0,01237)\text{m}$
	$y_8=(x+0,01237)\text{m}$
Unterer Block	$y_9=0,0325\text{m}$
Oberer Block	$y_{10}=0,028\text{m}$

Mit den Formeln (39) und (40) und den oben genannten Integrationsgrenzen können nun die einzelnen Massenträgheitsmomente berechnet werden. Die Indizes werden dabei folgendermaßen eingeteilt:

- 1 Motorblock in negativer x- Richtung
- 2 Arm in negativer x- Richtung
- 3 Unterer Block
- 4 Oberer Block
- 5 Arm in positiver x- Richtung
- 6 Motorblock in positiver x- Richtung

Zuerst werden die Hauptdiagonalelemente J_{xx} , J_{yy} und J_{zz} der Matrix der Massenträgheitsmomente berechnet:

2.2.4. Rotation

$$J_{xx} = J_{xx1} + J_{xx2} + J_{xx3} + J_{xx4} + J_{xx5} + J_{xx6} \quad . \quad (41)$$

$$J_{xx} = 0,0932 x^2 + 7,309 \cdot 10^{-4}$$

Setzt man für $x = 0,07465\text{m}$ ein, was dem Abstand der Mitte des Motorblocks, also dort, wo die Kraft angreift, bis zum Mittelpunkt entspricht, ergibt sich für das Massenträgheitsmoment:

$$J_{xx} = 1,25 \cdot 10^{-3} \quad . \quad (42)$$

Analog werden J_{yy} und J_{zz} berechnet:

$$J_{yy} = J_{yy1} + J_{yy2} + J_{yy3} + J_{yy4} + J_{yy5} + J_{yy6} \quad , \quad (43)$$

$$J_{yy} = 9,541 \cdot 10^{-4}$$

$$J_{zz} = J_{zz1} + J_{zz2} + J_{zz3} + J_{zz4} + J_{zz5} + J_{zz6} \quad . \quad (44)$$

$$J_{zz} = 0,144 x^2 + 6,2765 \cdot 10^{-4}$$

Wird hier wiederum $x = 0,07465\text{m}$ eingesetzt, so ergibt sich für J_{zz} :

$$J_{zz} = 1,43 \cdot 10^{-3} \quad . \quad (45)$$

Nun muss noch geprüft werden, ob die Nebenelemente der Matrix der Massenträgheitsmomente ebenfalls besetzt sind. Diese werden analog zu den Elementen der Hauptdiagonalen berechnet:

$$J_{xy} = J_{xy1} + J_{xy2} + J_{xy3} + J_{xy4} + J_{xy5} + J_{xy6} \quad , \quad (46)$$

$$J_{xy} = 0$$

$$J_{yx} = J_{yx1} + J_{yx2} + J_{yx3} + J_{yx4} + J_{yx5} + J_{yx6} \quad , \quad (47)$$

$$J_{yx} = 0$$

$$J_{xz} = J_{xz1} + J_{xz2} + J_{xz3} + J_{xz4} + J_{xz5} + J_{xz6} \quad , \quad (48)$$

$$J_{xz} = 0$$

$$J_{zx} = J_{zx1} + J_{zx2} + J_{zx3} + J_{zx4} + J_{zx5} + J_{zx6} \quad , \quad (49)$$

$$J_{zx} = 0$$

$$J_{yz} = J_{yz1} + J_{yz2} + J_{yz3} + J_{yz4} + J_{yz5} + J_{yz6} \quad , \quad (50)$$

$$J_{yz} = 0$$

$$J_{zy} = J_{zy1} + J_{zy2} + J_{zy3} + J_{zy4} + J_{zy5} + J_{zy6} \quad . \quad (51)$$

$$J_{zy} = 0$$

2.2.4. Rotation

Wie die Gleichungen (46) bis (51) zeigen ist kein Nebenelement der Matrix besetzt, wodurch sich für die Trägheitsmomente folgende Form ergibt:

$$J = \begin{pmatrix} 1,25 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 9,541 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 1,43 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} . \quad (52)$$

Die Zwischenergebnisse befinden sich im Anhang A.

2.2.5. Vollständiges Modell

Werden nun die einzelnen Bestandteile zusammengesetzt, so erhält man für das vollständige Modell die Gleichungen für die translatorischen Bewegungen:

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} - g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{F_M}{m} \begin{bmatrix} \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} - \frac{F_{WL}}{m} \quad (53)$$

mit $F_{WL} = \frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot \begin{bmatrix} 7,985 \cdot 10^{-3} m^2 \\ 7,575 \cdot 10^{-3} m^2 \\ 1,2672 \cdot 10^{-2} m^2 \end{bmatrix} \cdot 1,225 \frac{kg}{m^3} \cdot \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix}^2$

Und für die rotatorischen Bewegungen:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(J_{zz} - J_{yy}) \dot{\theta} \dot{\psi}}{J_{xx}} \\ \frac{(J_{xx} - J_{zz}) \dot{\varphi} \dot{\psi}}{J_{yy}} \\ \frac{(J_{yy} - J_{xx}) \dot{\varphi} \dot{\theta}}{J_{zz}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{((F_C + F_D) - (F_A + F_B)) l}{J_{xx}} \\ \frac{((F_A + F_D) - (F_B + F_C)) l}{J_{yy}} \\ \frac{-D_A + D_B - D_C + D_D}{J_{zz}} \end{bmatrix} . \quad (54)$$

mit $J = \begin{pmatrix} 1,25 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 9,541 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 1,43 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$

2.3. Evaluation

2.3.1. Analytisch

Die analytische Evaluation dient der ersten Abschätzung der Genauigkeit der Gleichungen. Dazu werden ein paar vereinfachende Annahmen getroffen:

- die Analyse erfolgt über einen Einzelschritt $\Delta t=1s$,
- die Gleichungen werden als Differenzgleichungen behandelt,
- als Anfangsbedingungen werden gewählt:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (55)$$

a) Ruhelage

Da das System in der Ruhelage seine Position nicht ändert können alle Ableitungen null gesetzt werden.

Zuerst werden die rotatorischen Gleichungen betrachtet:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{((F_C + F_D) - (F_A + F_B))l}{J_{xx}} \\ \frac{((F_A + F_D) - (F_B + F_C))l}{J_{yy}} \\ \frac{-D_A + D_B - D_C + D_D}{J_{zz}} \end{bmatrix} . \quad (56)$$

Löst man dieses nach den Einzelschüben auf, so ergibt sich, dass alle Schübe in der Ruhelage gleich sein müssen:

$$F_A = F_B = F_C = F_D . \quad (57)$$

Für die translatorischen Bewegungen ergibt sich mit der Annahme (55):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{F_M}{m} \begin{bmatrix} \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^2 . \quad (58)$$

Damit ergibt sich zum einen die triviale Ruhelage $F_M=0$, in der der Quadkopter nicht fliegt, und zum anderen:

$$F_M = 3,7965 \text{ N mit } \varphi = \theta = 0, \psi = \text{variabel} . \quad (59)$$

2.3.1. Analytisch

Damit ergibt sich für Gleichung (57):

$$F_A = F_B = F_C = F_D = 0,9491 \text{ N} \quad . \quad (60)$$

b) Quadkopter steigt gerade nach oben

Hier wird ein Einzelschub der Motoren auf $F_A = F_B = F_C = F_D = 1,1 \text{ N}$ gesetzt. Damit ergibt sich für die rotatorischen Bewegungen:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\Phi} \\ \ddot{\Theta} \\ \ddot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{((1,1+1,1)-(1,1+1,1))l}{J_{xx}} \\ \frac{((1,1+1,1)-(1,1+1,1))l}{J_{yy}} \\ \frac{(-1,1+1,1-1,1+1,1)l}{J_{zz}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (61)$$

Werden diese Werte für die translatorischen Gleichungen genutzt, so folgt für diese:

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{4,4 \text{ N}}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5,433 \cdot 10^{-3} \ddot{Z}(t=t_0)^2 \end{bmatrix} \quad . \quad (62)$$

Mit $\ddot{Z}(t=t_0)^2 = 0$ ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,56 \frac{m}{s^2} \end{bmatrix} \quad . \quad (63)$$

Das zeigt, dass sich der Quadkopter, wenn man alle Schübe gleichmäßig erhöht, nicht neigt und somit nur in die gewünschte Richtung beschleunigt.

Durch Integration lässt sich aus diesen Daten die Position bestimmen, die der Quadkopter nach einer Sekunde eingenommen hat.

2.3.1. Analytisch

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,78 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (64)$$

c) Quadkopter fliegt nach rechts in die positive x- Richtung

Für die Bewegung in positive x- Richtung werden $F_A=F_D=1,1 \text{ N}$ und $F_B=F_C=1,0 \text{ N}$ gesetzt. Die rotatorischen Bewegungen berechnen sich damit:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{((1,1+1,0)-(1,1+1,0))l}{J_{xx}} \\ \frac{((1,1+1,1)-(1,0+1,0))l}{J_{yy}} \\ \frac{(-1,1+1,0-1,0+1,1)l}{J_{zz}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15,648^\circ \text{ s}^{-2} \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (65)$$

Setzt man diesen Winkel und die Annahme (55) in die translatorischen Gleichungen ein, so ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{4,2}{m} \begin{bmatrix} \sin(15,648^\circ \frac{1}{2}) \\ 0 \\ \cos(15,648^\circ \frac{1}{2}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (66)$$

Für den Zeitraum t_0 bis t_1 folgt somit:

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,476 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ 0 \\ 0,94 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{bmatrix} . \quad (67)$$

Diese Ergebnisse zeigen, dass sich der Quadkopter nur um die y- Achse, also in x- Richtung, neigt. Dadurch ergibt sich sowohl eine Beschleunigung in diese Richtung als auch in z- Richtung. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der erhöhte Schub von F_A und F_D bei Neigung des Quadkoters gleichzeitig in negative x- als auch nach unten in negative z- Richtung wirkt, wodurch er auch nach oben beschleunigt wird. Zudem wurde für F_B und F_C ein Schub gewählt, der geringfügig über dem Ruhelagenschub liegt.

2.3.1. Analytisch

Durch Integration erhält man die Position:

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7,824^\circ \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,738 \text{ m} \\ 0 \\ 0,47 \text{ m} \end{bmatrix} . \quad (68)$$

d) Quadkopter fliegt nach vorne in positive y- Richtung

Für die Bewegung in positive y- Richtung werden $F_A=F_B=1,0 \text{ N}$ und $F_C=F_D=1,1 \text{ N}$ gesetzt. Damit ergibt sich für die rotatorischen Bewegungen:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{((1,1+1,1)-(1,0+1,0))l}{J_{xx}} \\ \frac{((1,0+1,1)-(1,0+1,1))l}{J_{yy}} \\ \frac{(-1,0+1,0-1,1+1,1)l}{J_{zz}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,944^\circ \text{ s}^{-2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (69)$$

Setzt man dieses Ergebnis und die Annahme (55) in die translatorischen Gleichungen ein, so erhält man:

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{4,2}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(11,944 \frac{1}{2}) \\ \cos(11,944 \frac{1}{2}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (70)$$

Für den Zeitraum t_0 bis t_1 folgt somit:

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,129 \frac{m}{s^2} \\ 0,984 \frac{m}{s^2} \end{bmatrix} . \quad (71)$$

Es zeigt sich, dass sich der Quadkopter ausschließlich um die x- Achse, also in positive y- Richtung, neigt. Für die translatorische Beschleunigungen ergibt sich wiederum eine Bewegung in y- und z- Richtung, wofür die Gründe analog zur Bewegung in positive x- Richtung zu finden sind.

Nach einer Sekunde erreicht der Quadkopter damit folgende Position:

2.3.1. Analytisch

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,972^\circ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,565 \text{ m} \\ 0,492 \text{ m} \end{bmatrix} . \quad (72)$$

2.3.2. Simulativ

Das Modell des Quadkopters wurde mit MATLAB Simulink simuliert. Dafür wurden die Grundbewegungen „Quadkopter fliegt nach rechts“, „Quadkopter fliegt nach vorne“, „Quadkopter giert“ und „Quadkopter steigt auf eine neue konstante Höhe“ gewählt. Für alle Bewegungen wurde als Grundschub der berechnete Ruhelagenschub gewählt.

a) Quadkopter fliegt nach rechts in positive x- Richtung

Für diese Bewegung wurden die Schübe F_A und F_D erhöht, während F_B und F_C auf dem Ruhelagenschub gelassen wurden, wie Abbildung (7) zeigt.

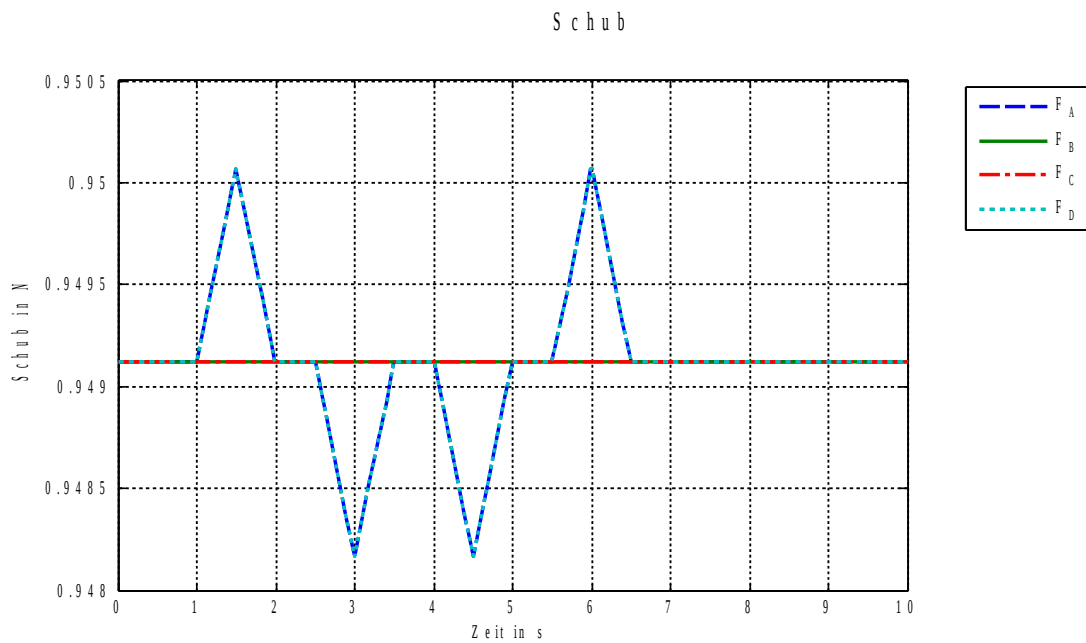


Abbildung 7: Einzelschübe in positive x- Richtung

Wählt man die Schübe in dieser Art, so ergeben sich folgende translatorische Bewegungen:

2.3.2. Simulativ

translatorische Bewegung

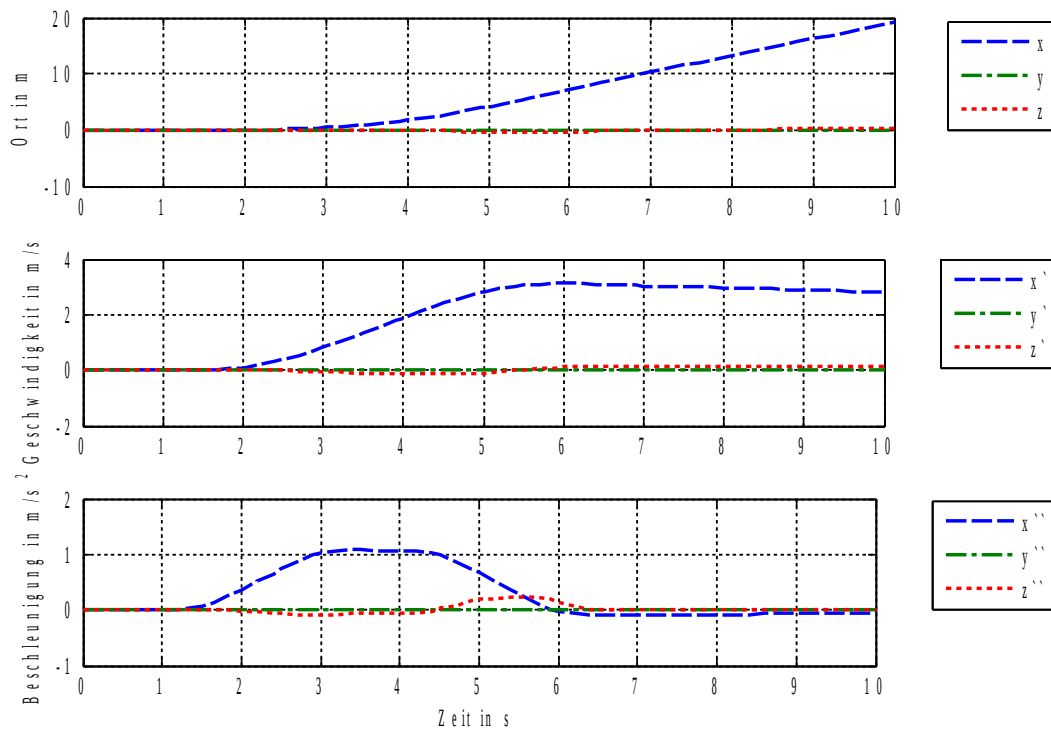


Abbildung 8: Translation bei Bewegung in positive x- Richtung

Wie in Abbildung (8) zu erkennen ist wird der Quadcopter zuerst in positive x- Richtung beschleunigt, diese Beschleunigung kurze Zeit konstant gehalten und danach wieder auf null verringert. Das bewirkt zuerst einen Anstieg der Geschwindigkeit, die danach langsam absinkt, was auf den Luftwiderstand zurückzuführen ist. Dadurch bewegt sich der Quadcopter in positive x- Richtung.

Für die rotatorischen Gleichungen gilt dann:

2.3.2. Simulativ

rotatorische Bewegung

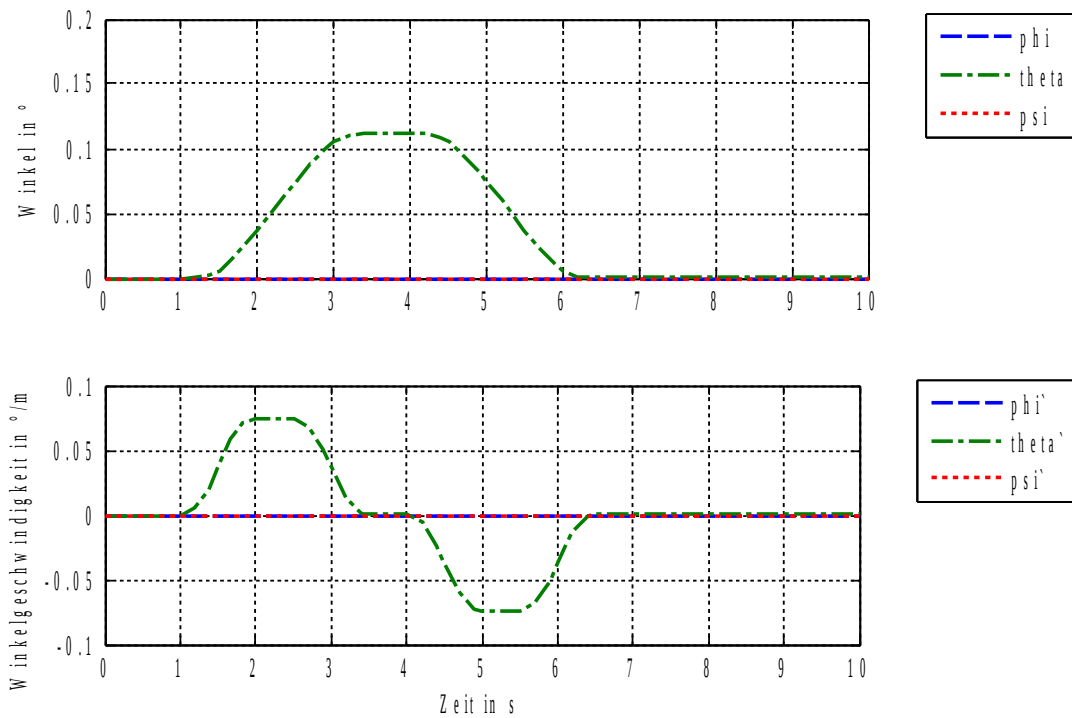


Abbildung 9: Rotation bei Bewegung in positive x- Richtung

Abbildung (9) zeigt, dass sich der Quadkopter nur um seine y- Achse dreht.

Zuerst erhöht sich die Winkelgeschwindigkeit und wird danach auf null zurück gesetzt, wodurch sich der Quadkopter in positive x- Richtung neigt. Danach wird diese Position kurz konstant gehalten, bevor die Winkelgeschwindigkeit analog verringt wird, der Quadkopter wird in seine Ausgangsposition zurück geführt.

2.3.2. Simulativ

b) Quadkopter fliegt nach vorne in positive y- Richtung

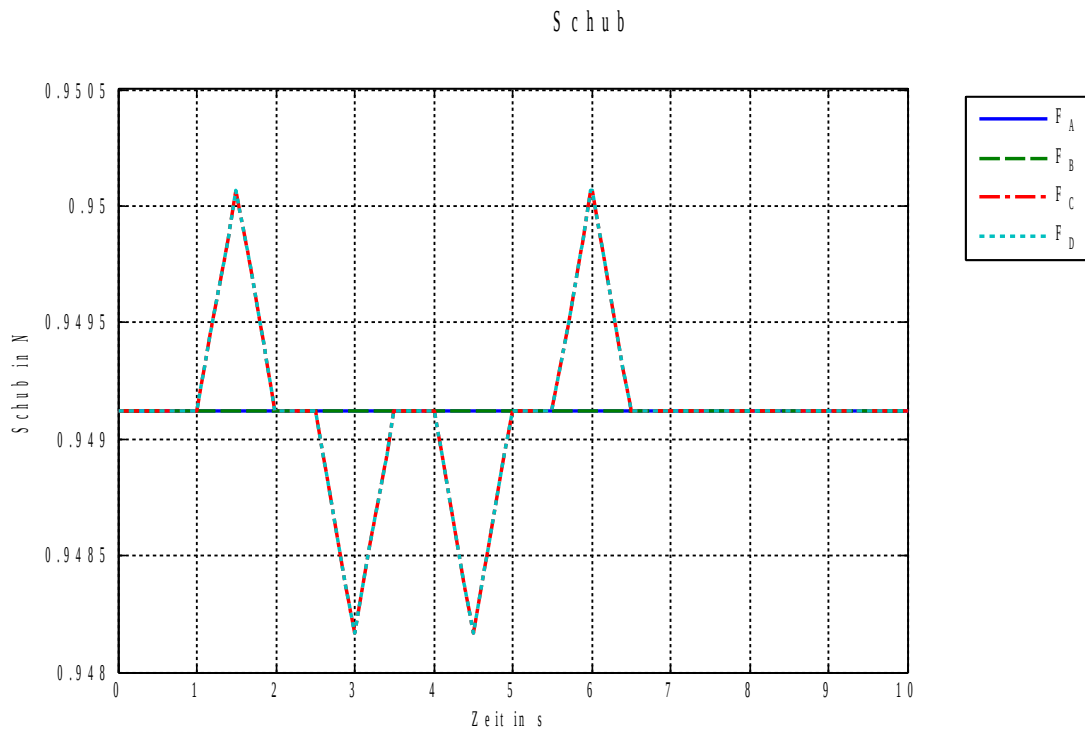


Abbildung 10: Einzelschübe in positive y- Richtung

Wie Abbildung (10) zeigt wurden für diese Bewegung wurden die Schübe F_C und F_D erhöht, während F_A und F_B auf dem Ruhelagenschub gelassen wurden.

Analog zur Bewegung in positive x- Richtung wird der Quadkopter zuerst in positive y- Richtung beschleunigt, die Beschleunigung kurz konstant gehalten und danach wieder auf null abgesenkt. Das bewirkt zuerst einen Anstieg der Geschwindigkeit, die danach langsam absinkt, was wiederum auf den Luftwiderstand zurückzuführen ist. Dadurch bewegt sich der Quadkopter in positive y- Richtung. Verdeutlicht wird dies durch Abbildung (11):

2.3.2. Simulativ

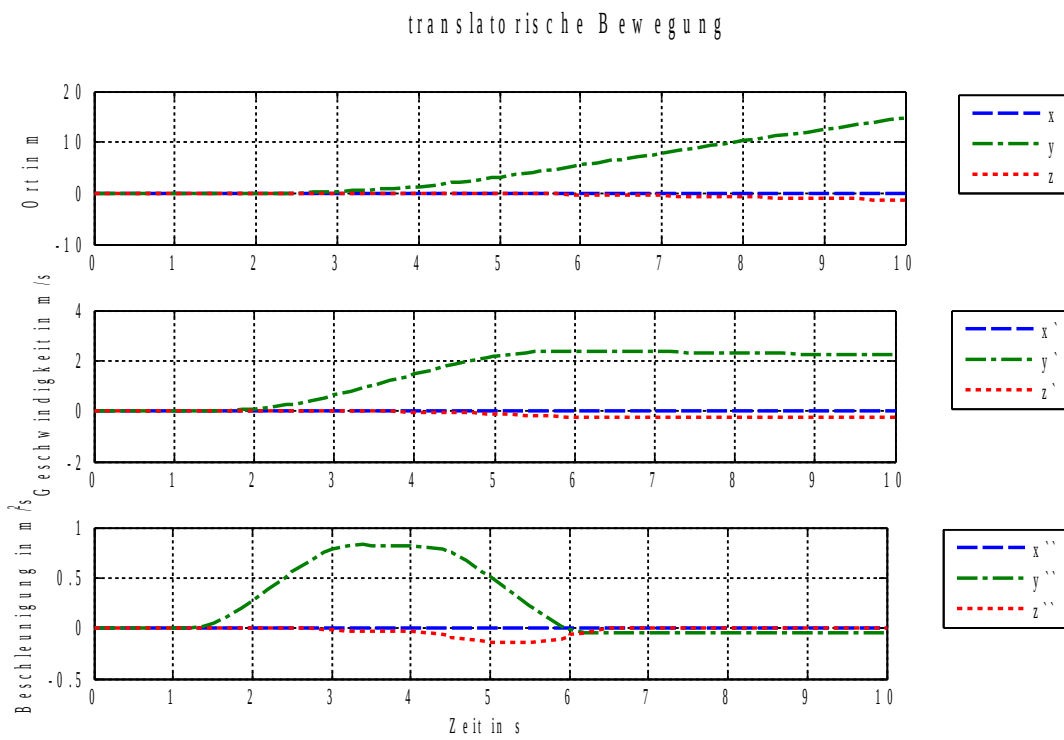


Abbildung 11: Translation bei Bewegung in positive y- Richtung

Auch die rotatorischen Bewegungen verlaufen analog zur Rotation bei Bewegung in positive x- Richtung:

2.3.2. Simulativ

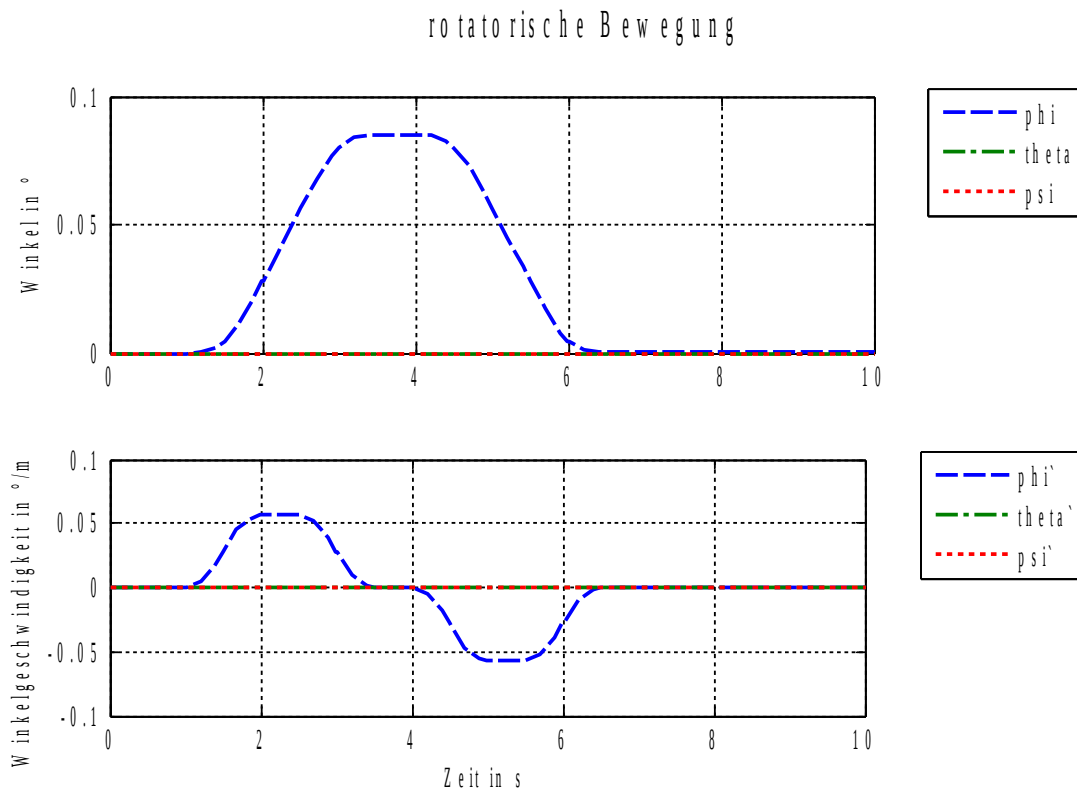


Abbildung 12: Rotation bei Bewegung in positive y- Richtung

Der Quadcopter dreht sich nur um seine x- Achse, wodurch die Bewegung in y- Richtung ausgelöst wird.

Die Winkelgeschwindigkeit wird zuerst erhöht und danach auf null zurück gesetzt. Dies bewirkt die Neigung des Quadcopters in positive y- Richtung. Danach wird diese Position kurz konstant gehalten, bevor die Winkelgeschwindigkeit gesenkt und der Quadcopter wieder in seine Ausgangsposition zurück geführt wird.

c) Quadcopter giert

Bei der Gierbewegung dreht sich der Quadcopter um seine z- Achse, es wird der Winkel ψ verändert. Um dies zu erreichen ohne, dass er sich auch um eine weitere Achse drehen müssen die Drehmomente eines Rotorenpaars mit gleicher Drehrichtung verändert werden, während die des anderen Rotorenpaars konstant gehalten werden. Hier werden die Schübe F_A und F_C und damit auch ihre Drehmomente erhöht, während F_B und F_D samt Drehmomenten konstant bleiben (Abbildung (13)).

2.3.2. Simulativ

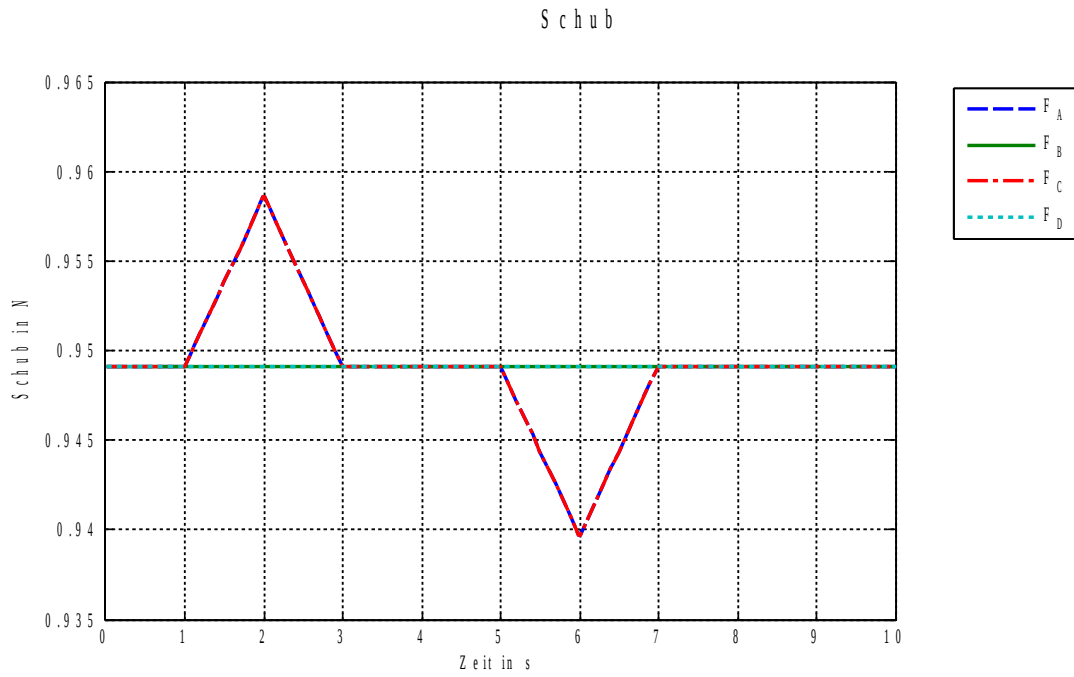


Abbildung 13: Einzelschübe bei der Gier- Bewegung

Für die Translation ergibt sich damit:

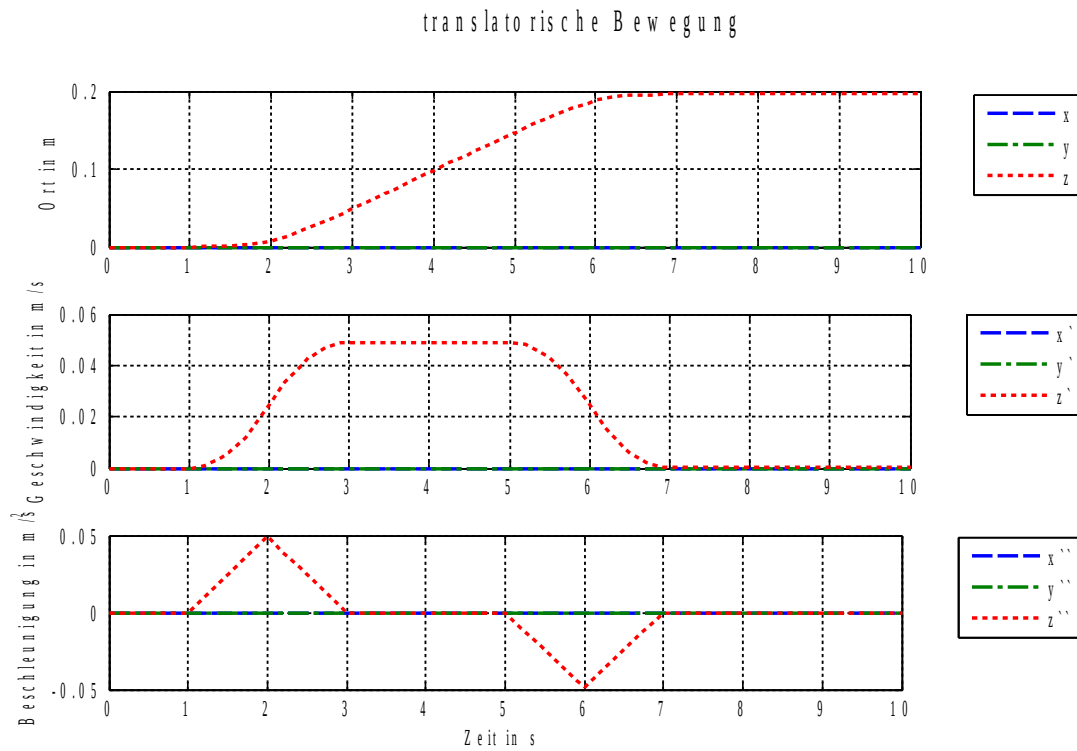


Abbildung 14: Translation bei der Gier- Bewegung

2.3.2. Simulativ

In Abbildung (14) ist zu sehen, dass sich der Quadkopter nur in z- Richtung bewegt. Das ist darauf zurückzuführen, dass durch die Erhöhung von zwei Einzelschüben, während die anderen beiden konstant gehalten werden, auch der Gesamtschub erhöht wird. Das hat zur Folge, dass der Quadkopter steigt.

Das Gieren wird erst in den rotatorischen Bewegungen deutlich:

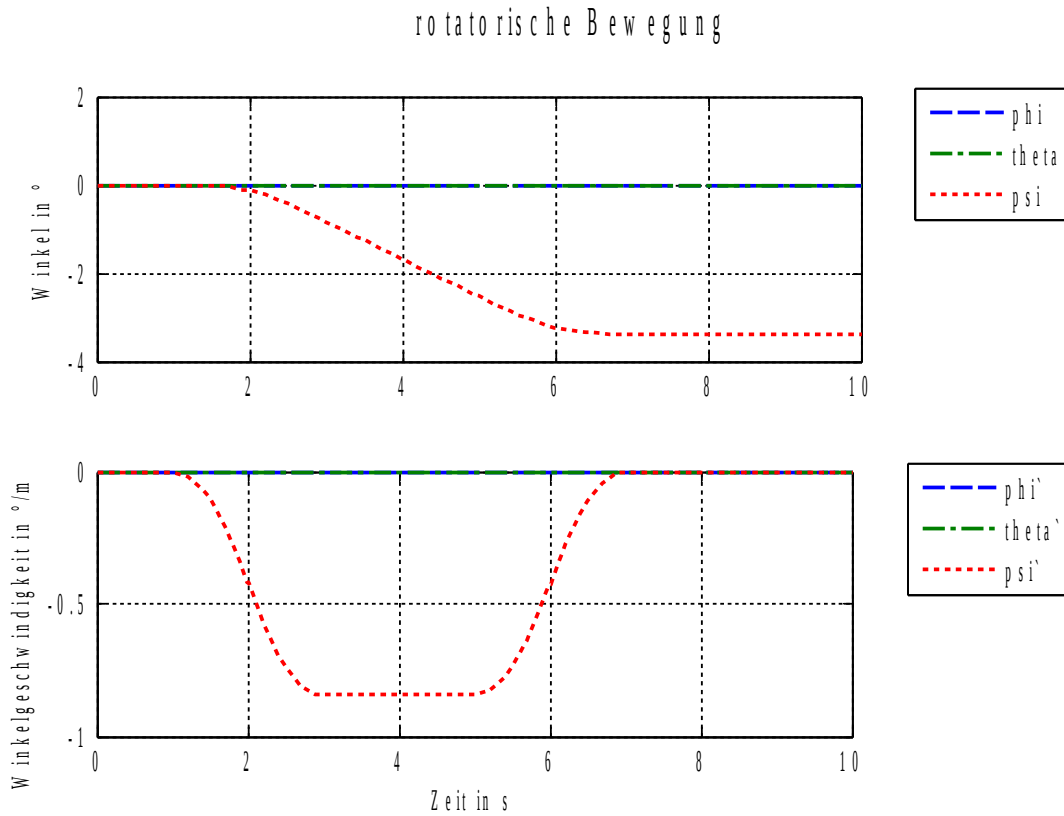


Abbildung 15: Rotation bei der Gier- Bewegung

Wie Abbildung (15) zeigt wird nur eine Drehung um die z- Achse, das Gieren, bewirkt.

2.3.2. Simulativ

d) Quadkopter steigt auf neue konstante Höhe

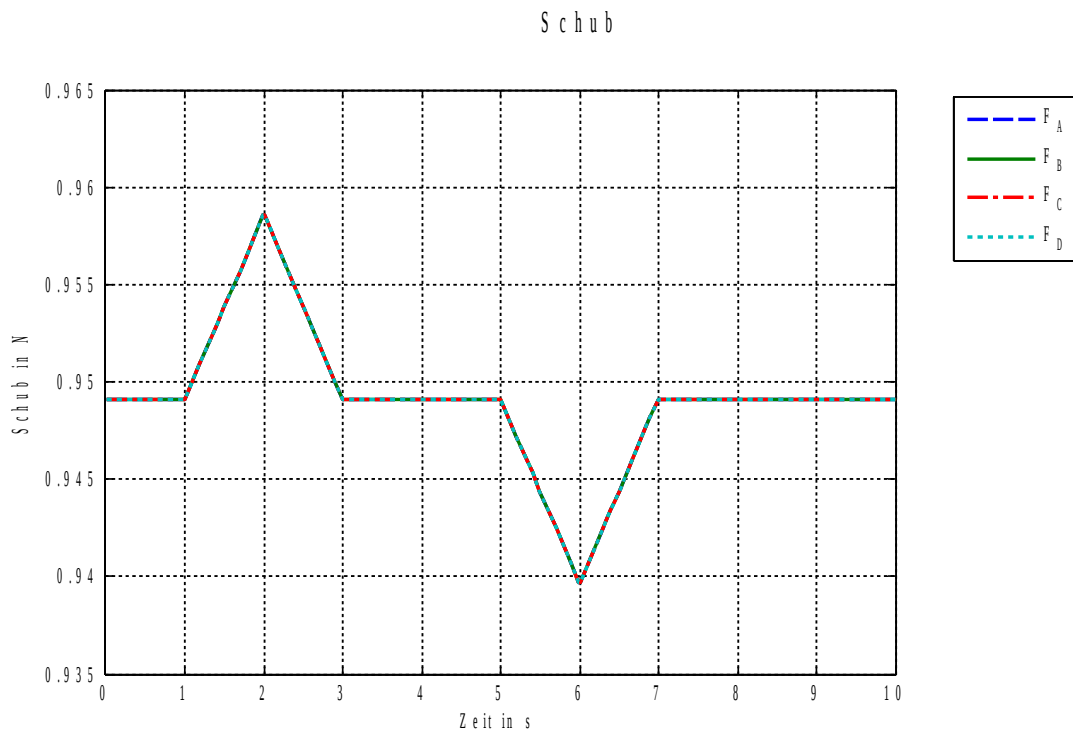


Abbildung 16: Einzelschübe beim Steigen auf eine neue konstante Höhe

Um den Quadkopter auf eine neue Höhe steigen zu lassen werden, wie in Abbildung (16) zu sehen, alle vier Einzelschübe gleichmäßig erhöht.

Dadurch ergeben sich folgende translatorische Bewegungen:

2.3.2. Simulativ

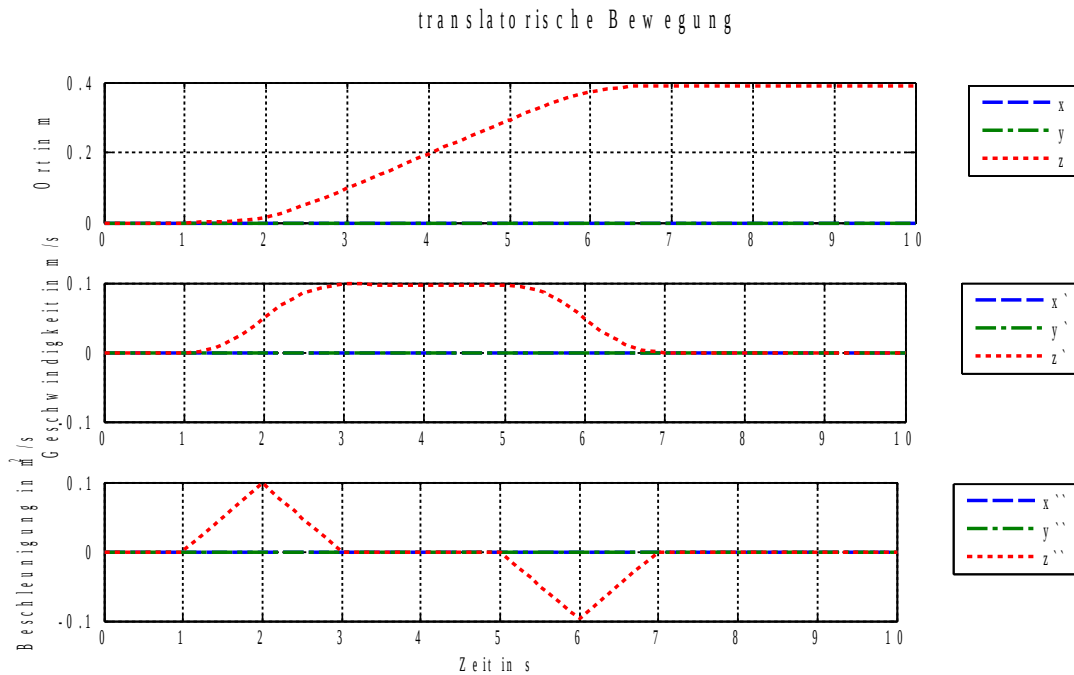


Abbildung 17: Translation beim Steigen auf eine neue konstante Höhe

In Abbildung (17) ist zu sehen, dass die Beschleunigung im direkten Zusammenhang mit der Veränderung der Einzelschübe steht. Die Geschwindigkeit in z- Richtung wird zuerst erhöht, wodurch der Quadkopter beginnt zu steigen, dann eine Zeit lang konstant gehalten, während er seine Höhe weiter vergrößert und dann wieder auf null verringert, wenn der Quadkopter die neue Höhe erreicht hat, sodass er diese hält.

Die Simulation der rotatorischen Bewegungen (Abbildung (18)) zeigt, dass sich der Quadkopter in keiner Richtung neigt, sodass sich einzig seine Höhe ändert.

2.3.2. Simulativ

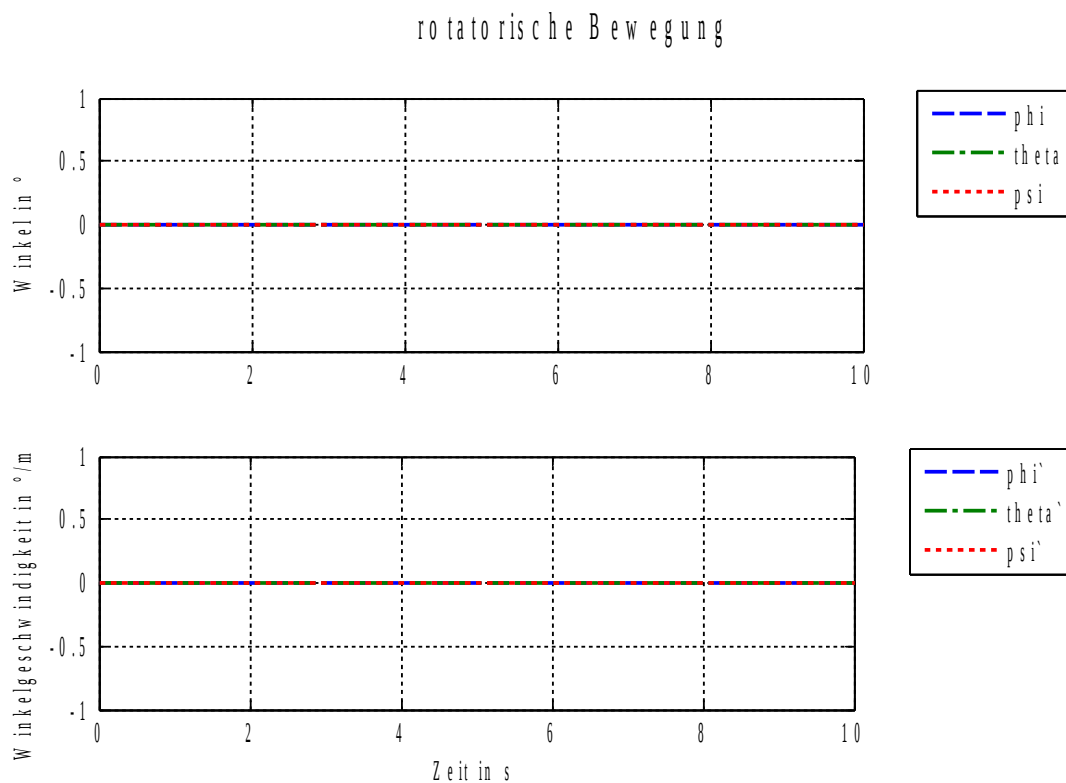


Abbildung 18: Rotation beim Steigen auf eine neue konstante Höhe

2.3.3. Praktisch

Für die praktische Evaluation sollten Daten eines möglichst unregelmäßigen Fluges des realen Quadkopters aufgezeichnet werden. Die dabei aufgezeichneten Schübe sollten als Eingangssignale für die Simulation des Modells verwendet werden. Die so erhaltenen Modell- Daten sollten gemeinsam mit den aufgezeichneten des realen Quadkopters in einem Diagramm dargestellt und verglichen werden. Allerdings war ein unregelmäßiger Flug nicht möglich, sodass ein autonomer aufgezeichnet wurde.

Die Daten wurden dabei auf drei verschiedene Weisen aufgenommen. Der Gierwinkel und die Bewegung in x- und y- Richtung wurden mit einer Deckenkamera aufgezeichnet. Die Pulsweitenmodulationswerte (PWM- Werte) wurden auf eine SD- Karte geschrieben. Die Bewegung in z- Richtung sowie der Nick- und Rollwinkel wurden über die Telemetrie des Quadkopters ausgelesen.

Um diese Daten für die Evaluation nutzen zu können mussten sie bearbeitet werden. So wurde bei den Daten der Kamera der Gierwinkel, dessen Aufzeichnung sehr verrauscht war, so weit gefiltert, dass keine Ausreißer mehr in den Daten vorhanden waren. Dasselbe wurde mit den Telemetriedaten, also der Bewegung in z- Richtung und dem Nick- und Rollwinkel, gemacht.

Die PWM- Signale wurden zuerst in prozentuale Anteile vom Gesamtschub umgerechnet. Danach wurde ein Hochpassfilter angewendet, sodass nur noch die Abweichung vom Mittelwert, der den Ruhelagenschub bei 35% darstellt, vorhanden waren. Dadurch sollte auch der Offset zwischen den vier Motoren herausgefiltert werden.

2.3.3. Praktisch

Die Aufzeichnungen aus allen drei Quellen waren zeitlich verschoben, sodass sie auf einen gemeinsamen Start- und Endpunkt gesetzt werden mussten.

Zur besseren Übersicht werden die Messdaten zunächst einzeln dargestellt.

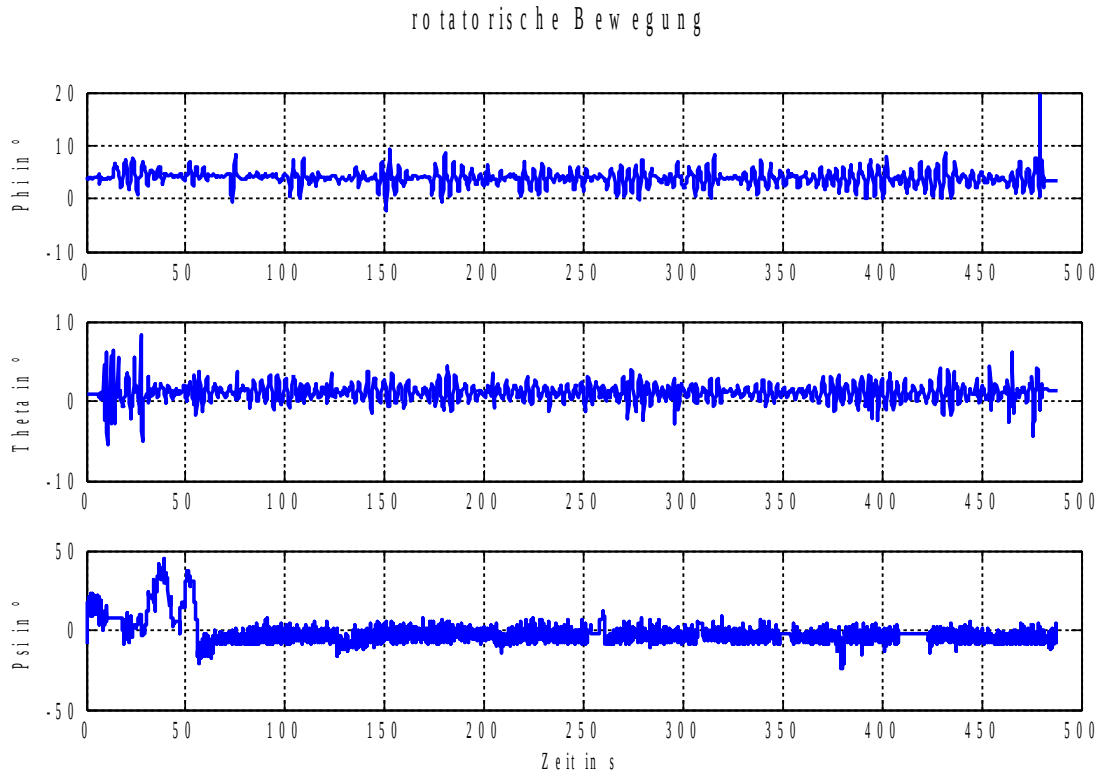


Abbildung 19: Gemessene rotatorische Bewegungen des realen Quadkopters

Wie in Abbildung (19) zu sehen ist haben sowohl der Roll- als auch der Nickwinkel einen Versatz in positive Richtung. Dadurch wäre eine Beschleunigung in x- und y- Richtung zu erwarten, was allerdings, wie in Abbildung (20) zu sehen ist, nicht der Fall ist, sodass von einem Messfehler der Sensoren ausgegangen werden kann. Der Gierwinkel war anfangs stark verrauscht, dies wurde aber durch Filtern der Daten so weit reduziert, dass er nur noch um ungefähr 10° schwankt, was einem realistischen Wert entspricht. Dennoch ist weiterhin ein Rauschen zu erkennen.

Abbildung (20) zeigt die gemessenen rotatorischen Bewegungen des realen Quadkopters. Die Messungen für die Bewegung in x- Richtung schwanken im Vergleich zur Bewegung in y- Richtung recht stark. Die Höhe hält der Quadkopter, nachdem er sie erreicht hat, stabil bis die Akkuspannung nachlässt.

2.3.3. Praktisch

translatorische Bewegung

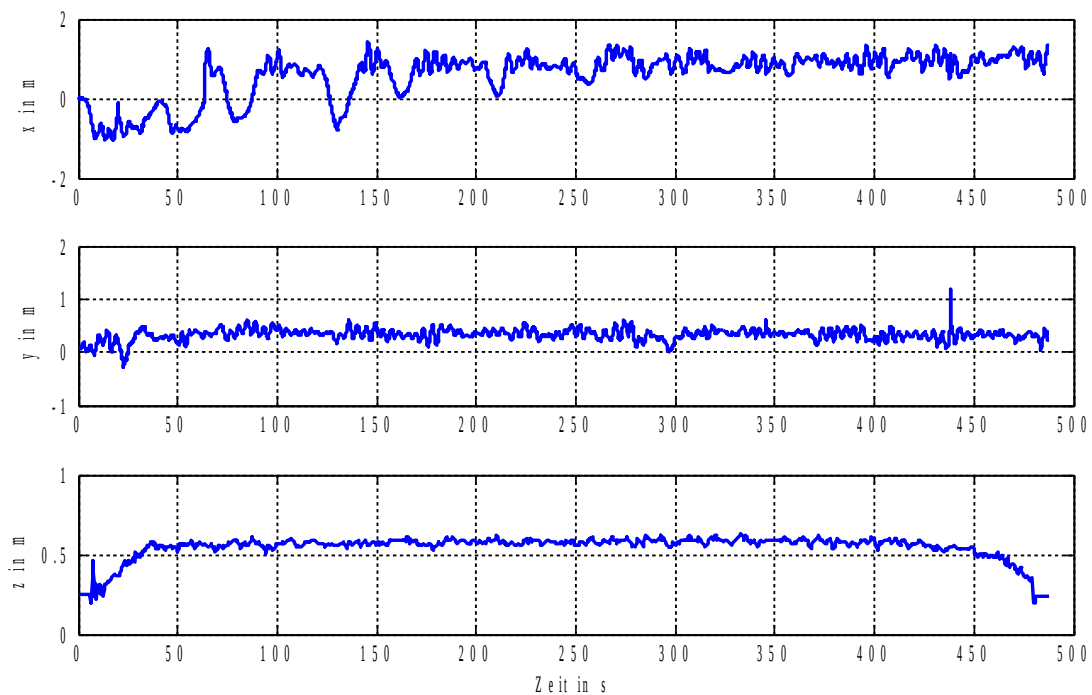


Abbildung 20: Gemessene translatorische Bewegung des realen Quadkopters

Trotz dieser Filterung blieb ein Offset zwischen den Schubwerten, durch den zusätzliche Beschleunigungen simuliert wurden. Deshalb war eine direkte praktische Evaluation nicht möglich und es wurde sich auf eine Abschätzung der Stabilität des unregulierten Modells beschränkt.

Die Aufzeichnung der Schübe in Abbildung (21) zeigt, dass diese vielen Schwankungen unterlegen waren, was auf das Eingreifen der Regler während des aufgezeichneten Fluges zurückzuführen ist. Diese Schwankungen könnten ein weiterer Grund für die Ungenauigkeit der Simulation sein, da das Modell auf idealisierte Daten ausgelegt ist.

2.3.3. Praktisch

Schub

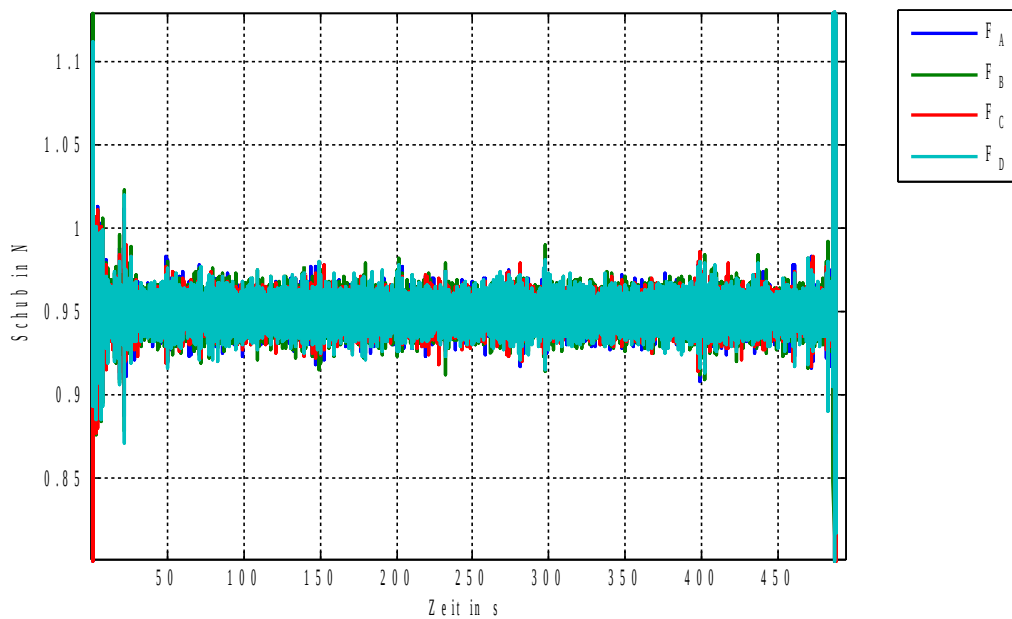


Abbildung 21: Schübe bei der praktischen Evaluation

rotatorische Bewegung

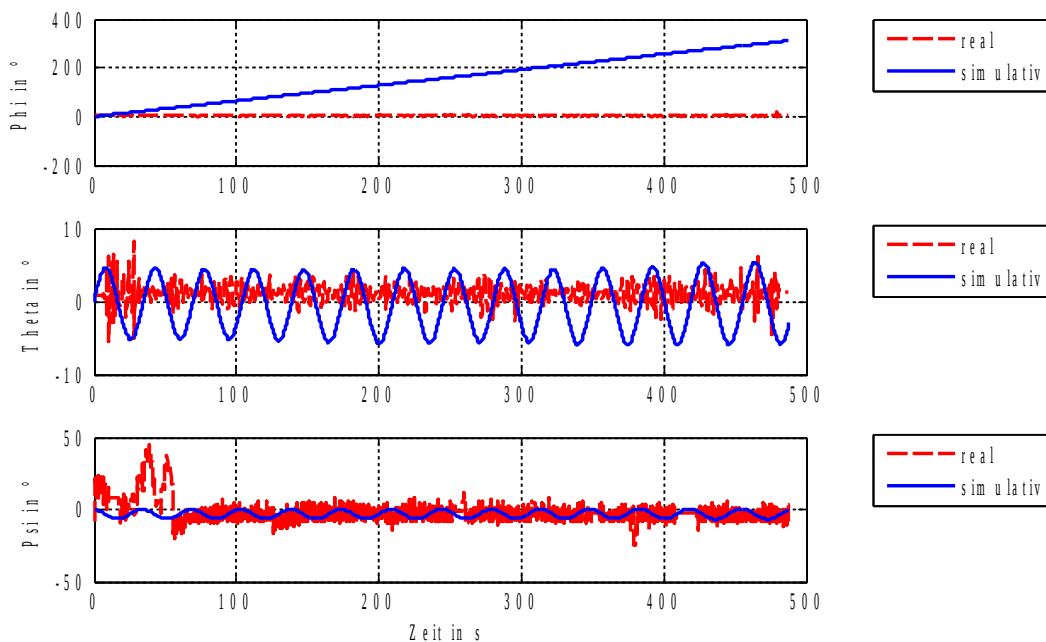


Abbildung 22: Vergleich der simulierten und der gemessenen Rotation des Quadkopters

Wie in Abbildung (22) zu erkennen wird besonders der Winkel Φ nicht realistisch vom Modell abgebildet. Dies ist auf die durch den Offset der Schübe simulierte Beschleunigung zurückzuführen, die bei diesem Winkel besonders groß war. Die Simulation des Winkel θ schwingt deutlich stärker

2.3.3. Praktisch

als der real gemessene Winkel und mit einer viel geringeren Frequenz. Allerdings bewegt er sich im Rahmen der angenommenen 10° . Bei genauer Betrachtung fällt auf, dass die Schwingungen im negativen Bereich insgesamt etwas stärker ausgeprägt sind als im positiven Bereich, sodass bei der translatorischen Bewegung auch hier eine entsprechend große Abweichung zu den Daten des realen Quadkopters entstehen wird. Berücksichtigt man das starke Rauschen des Gierwinkels, so wird dieser zufriedenstellend durch das Modell abgebildet.

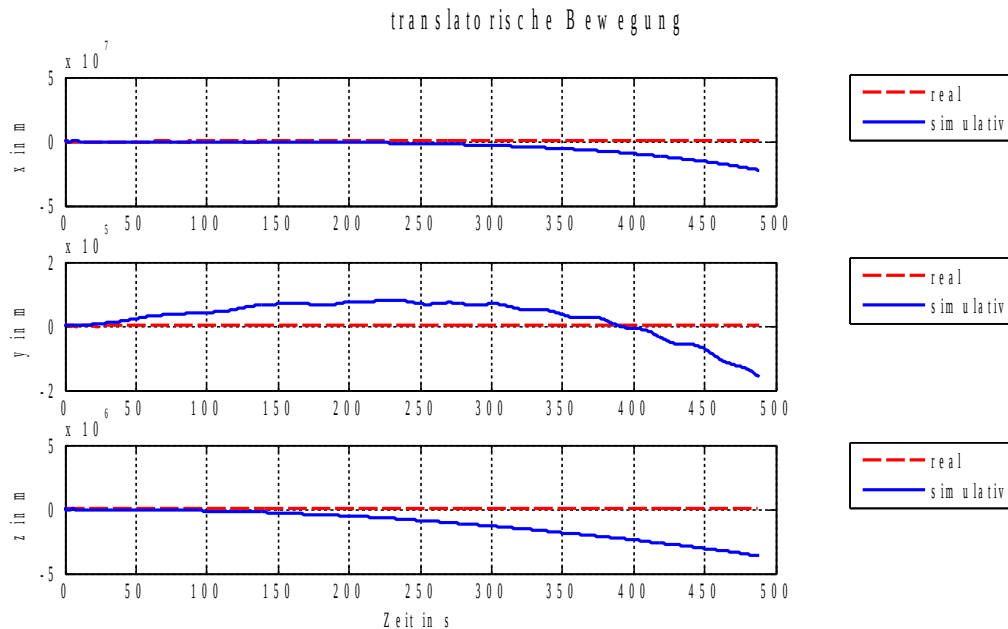


Abbildung 23: Vergleich der simulierten und der gemessenen Translation des Quadkopters

Die großen Abweichungen der Winkel zeigt sich in ihrem Einfluss auf die Translation deutlich (Abbildung (23)). Sowohl in x- als auch in y- Richtung weichen die simulierten Werte extrem stark von den Messwerten für den realen Quadkopter ab. Der starke Abfall der Höhe ist ebenfalls auf den großen Winkel Φ zurückzuführen, da für den simulierten Quadkopter durch die starke Neigung ein entsprechend kleiner Anteil des Schubes in z- Richtung zeigt und somit für die Haltung der Höhe genutzt werden kann.

2.3.4. Strukturelle Identifizierbarkeit der Antriebsgleichung

Die Einzelschübe F_i können durch folgende Gleichung dargestellt werden (Bouabdallah 2007 #2I: 20):

$$F_i = c_t \rho_L A_p (\omega_p r_p)^2 \tag{73}$$

Dabei ist die Motorkonstante c_t ein unbekannter Parameter, dessen strukturelle Identifizierbarkeit gezeigt werden soll. Die Dichte der Luft ρ_L hat den Wert $\rho_L = 1,2041 \frac{kg}{m^3}$, der Radius des Propellers beträgt $r_p = 0,0635 m$. Die Fläche des Propellers wurde mit $A_p = 1,646 \cdot 10^{-3} m^2$ ausgemessen.

Die Drehzahl des Propellers verhält sich dynamisch und kann mit der folgenden Gleichung approximiert werden:

2.3.4. Strukturelle Identifizierbarkeit der Antriebsgleichung

$$T \frac{d\omega_p}{dt} + \omega_p = Ku \quad (74)$$

Wird auf diese Gleichung die Laplacetransformation angewendet, so erhält man ein PT₁- Glied:

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad (75)$$

Dabei stellt T eine Zeitkonstante, K die Verstärkung und u die Eingangsgröße dar.

Um das dynamische Verhalten zu untersuchen, wurden die Messdaten bearbeitet. Da unter Annahme eines linearen Verhaltens der Schub immer um 10 Prozent erhöht wurde entstanden 10 Messreihen. Diese Daten wurden so normiert, dass die Drehzahl zu Beginn des Sprunges auf null und die entgültige Drehzahl auf eins gesetzt wurde. Die Ergebnisse befinden sich im Anhang. So konnten alle Messreihen in einem Diagramm dargestellt werden.

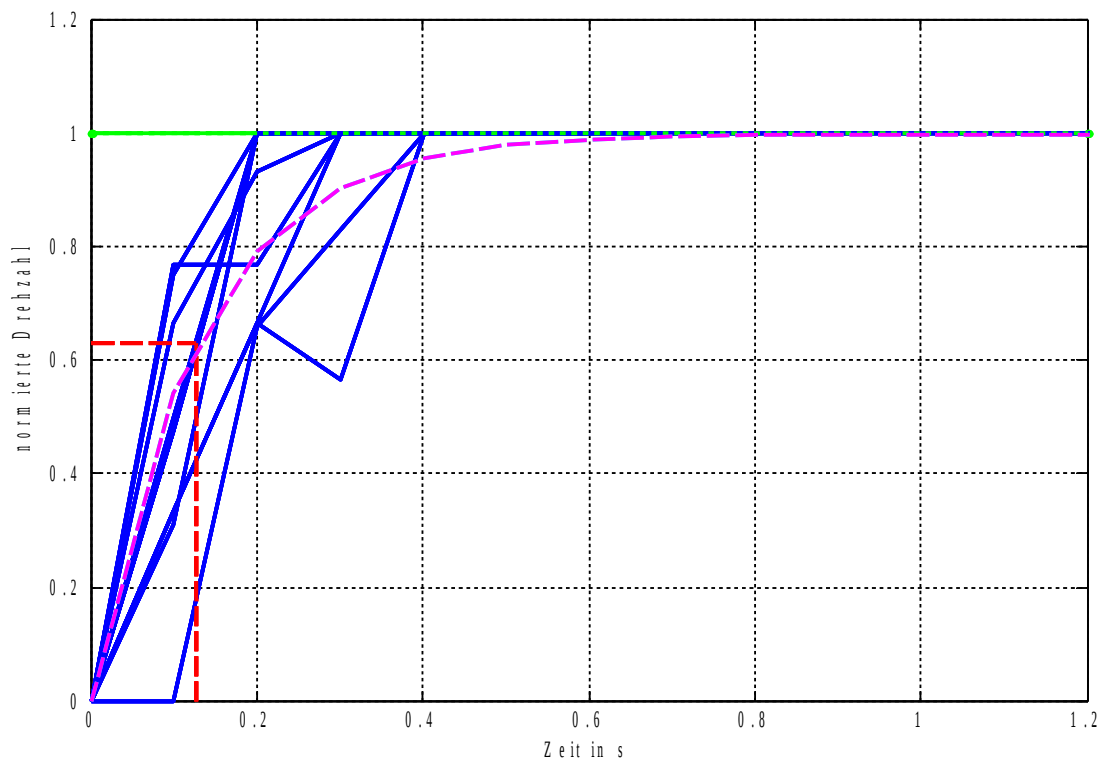


Abbildung 24: Dynamisches Verhalten der Drehzahl

Wie in Abbildung (24) und Tabelle (2) im Anhang zu sehen ist haben die Daten eine sehr geringe Auflösung, wodurch kein eindeutiger Kurvenverlauf entsteht. Die Parameterbestimmung wurde deshalb mit einer der mittig liegenden Funktionen durchgeführt. Die Verstärkung K ist in der Grafik grün dargestellt und liegt bei $K=1$. Die Zeitkonstante T wird bestimmt, indem der zu $0,63 \cdot K$ zugehörige Zeitwert abgelesen wird, in der Grafik rot dargestellt {Lutz 1998 #27I: 114}. Dieser liegt bei $T=0,128$ s, wodurch sich $G(s) = \frac{1}{0,128 \cdot s + 1}$ ergibt. Der Verlauf ist in magenta dargestellt. T hat also einen sehr geringen Einfluss und entspricht ungefähr dem kleinsten, messbaren Zeitunterschied $\Delta t=0,1$ s. Dies zeigt, dass das dynamische Verhalten der Drehzahl sehr

2.3.4. Strukturelle Identifizierbarkeit der Antriebsgleichung

schnell und mit den vorhandenen Mitteln nicht genügend messbar ist, sodass es im weiteren Verlauf als vernachlässigbar angenommen wird.

Mit dieser Annahme wird nun wird die Methode der kleinsten Quadrate wie in Kapitel 2.1.4. a) beschrieben angewendet. Setzt man Formel (73) in Formel (7) ein, so erhält man mit den Messwerten \hat{F} für den Parameter c_t :

$$c_t = \min_p \chi^2 = \min_p \left(\sum_{i=1}^n (c_t \rho_L A_p(\omega_p r_p)^2 - \hat{F}(\omega_p)_i)^2 \right) = 4,3775 \quad . \quad (76)$$

Über die Profile Likelihood- Methode wird getestet, ob dieser Parameter optimal ist. Dazu wird das Verfahren wie in Kapitel 2.1.4. b) Formel (8) genutzt. Die Schwelle, die im Kurvenverlauf überschritten werden muss wird nach Formel (9) bestimmt und liegt bei $\Delta_\alpha=6,6$.

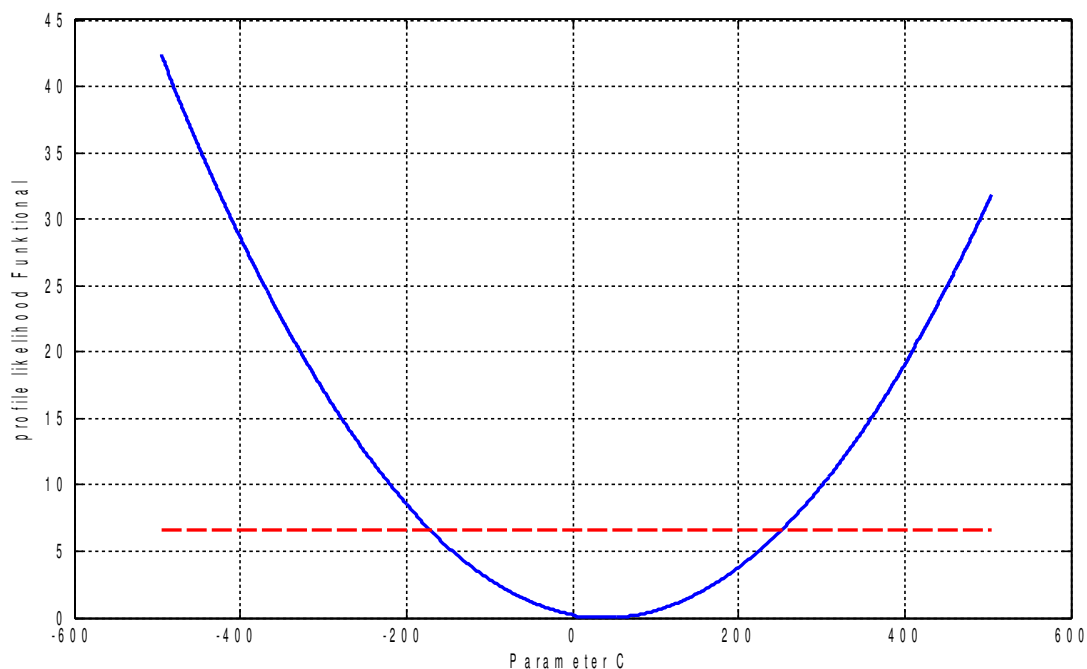


Abbildung 25: Bestimmung der strukturellen Identifizierbarkeit des Parameters c_t

Wie in Abbildung (25) erkennbar ist hat das Fehlerfunktional ein Minimum beim ermittelten Wert des Parameters und überschreitet die ermittelten Grenzen. Dies bedeutet, dass der Parameter c_t strukturell identifizierbar ist und sein Wert bei $c_t=4,3775$ liegt. Da es sich um eine Formel mit nur einem Parameter handelt ist c_t vollständig identifizierbar. Der Vorteil dieses Verfahrens zeigt sich in erster Linie bei mehreren Parametern.

3. Schlussteil

3.1. Zusammenfassung

Die Ziele der Arbeit wurden größtenteils erreicht. Es wurde ein dynamisches Modell für die translatorischen und rotatorischen Gleichungen des Quadkopters FINken 3 entwickelt. Dieses

3.1. Zusammenfassung

wurde analytisch und simulativ evaluiert. Die praktische Evaluation erwies sich als schwierig. Zusätzlich wurde der Parameter c_i der Antriebsgleichung auf strukturelle Identifizierbarkeit getestet und sein Wert ermittelt.

Für die Bewegungen des Quadkopters wurden zuerst die elementaren Bewegungen modelliert und anschließend um den Luftwiderstand ergänzt. Dieser wurde nur bei den translatorischen Gleichungen berücksichtigt und bei den rotatorischen Bewegungen vernachlässigt. Zum Schluss wurde die Form und Dichte des Quadkopters berücksichtigt, wodurch seine Bewegungen möglichst realistisch dargestellt werden sollen. Dies geschah durch eine Einteilung des Quadkopters in einzelne Blöcke, deren Außenmaße und Gewichte bestimmt wurden. Bei der Translation flossen diese Werte in die Gleichung des Luftwiderstandes ein. Die Form beeinflusste die Rotation ausschließlich über die Massenträgheitsmomente, die mit den ermittelten Daten berechnet wurden.

Die erhaltenen Gleichungen wurden zunächst analytisch evaluiert. Bei diesen vereinfachten Berechnungen hat sich gezeigt, dass das Modell für die betrachtete Zeit realistische Werte liefert. Dabei wurden neben der Ruhelage die Fälle berechnet, dass der Quadkopter gerade nach oben steigt, nach rechts in die positive x - Richtung und nach vorne in die positive y - Richtung fliegt.

Während der darauf folgenden simulativen Evaluation wurde der erste positive Eindruck bestätigt. Es wurden vier Bewegungen betrachtet: der Quadkopter fliegt nach rechts in die positive x - Richtung, nach vorne in die positive y - Richtung, er giert und er steigt auf eine neue konstante Höhe. Für alle vier Fälle lieferte die Simulation die erwarteten Ergebnisse.

Die praktische Evaluation erwies sich als Herausforderung. Da die praktischen Daten aus drei unterschiedlichen Quellen stammten waren sie zeitlich verschoben und mussten zunächst auf einen gemeinsamen Start- und Endzeitpunkt gebracht werden. Ein Teil der Daten war stark verrauscht und musste gefiltert werden, um sie für die Evaluation nutzbar zu machen. Den größten Einfluss hatten aber die gemessenen PWM- Signale, die nach der Bearbeitung als Eingangsdaten für die Simulation dienen sollten. Zwischen den Daten der vier Motoren war ein starker Versatz, sodass jeder Motor ein unterschiedliches Signal erhielt. Über einen Hochpassfilter konnte dieses Problem zwar deutlich verbessert, allerdings nicht komplett gelöst werden. So blieb ein kleiner Versatz, der zu einer Abweichung der Beschleunigung geführt hat. Dadurch entstand eine über die Zeit immer größer werdende Differenz sowohl zwischen den rotatorischen als auch zwischen den translatorischen Bewegungen des Modells und des realen Quadkopters.

Der Test auf strukturelle Identifizierbarkeit sollte für die Antriebsgleichung geschehen. Diese wurde analog zur Antriebsgleichung aus {Bouabdallah 2007 #2I: 20} gewählt. Das dynamische Verhalten der Drehzahl wurde mit einem PT_1 - Glied approximiert, allerdings erwies sich die Abtastrate bei der Messung als zu gering, sodass dieses nicht betrachtet werden konnte. Die strukturelle Identifizierbarkeit des Parameters c_i der Antriebsgleichung konnte mit Hilfe der Profile Likelihood-Methode nachgewiesen werden. Da es sich nur um einen Parameter handelte war er auch gleichzeitig vollständig identifizierbar. Sein Wert wurde mittels der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt.

3.2. Ausblick

Im Laufe dieser Arbeit haben sich folgende Verbesserungsmöglichkeiten und weiterführende Fragestellungen ergeben:

Die Genauigkeit des Modells könnte dadurch verbessert werden, dass die Form und die Massenverteilung noch genauer berücksichtigt werden. Dies kann durch folgende Maßnahmen geschehen:

3.2. Ausblick

- Der Akku kann als eigener Block modelliert werden. Da er zwar zentral, aber nicht genau mittig des Quadkopters platziert ist könnte seine separate Modellierung zu einer Verschiebung des Schwerpunktes führen, der dadurch noch einmal bestimmt werden müsste.
- Die Massenverteilung in den einzelnen Blöcken wird momentan als gleichmäßig angenommen. Es könnte untersucht werden, inwiefern dies zutrifft und welche Verbesserungen durch eine detailliertere Verteilung erreicht werden können.

Die bisher entwickelten Höhen- und Wandvermeidungsregler können mit dem Modell kombiniert beziehungsweise auf dieses angepasst werden. Die genauere Modellierung der translatorischen und die der im bisherigen Reglermodell nicht berücksichtigten rotatorischen Bewegungen sollten zu einer besseren Regelung der Quadkopter führen.

Die praktische Evaluation könnte von dem Zusammenführen von Regler und Modell ebenfalls profitieren. In diesem Fall könnten die unregelmäßigen Eingänge genutzt werden, wodurch die Signale wahrscheinlich weniger verrauscht und versetzt wären, was zu einem verwertbaren Ergebnis führen würde. Dieses könnte dann mit den gemessenen Daten des realen Quadkopters verglichen werden, wobei diese eventuell durch andere Sensoren rauschfreier aufgenommen werden könnten. Dadurch könnte durch eine weniger starke beziehungsweise wegfallende Filterung wiederum eine potentielle Fehlerquelle eliminiert werden.

Durch eine höhere Abtastrate bei der Drehzahlmessung könnte deren dynamisches Verhalten in der Antriebsgleichung berücksichtigt werden. Sollte diese Messung später während des Fluges machbar sein, so könnte über die Antriebsgleichung die Drehzahl als Eingang für die Simulation genutzt werden, was ebenfalls die Probleme mit den Signalen der Pulsweitenmodulation lösen würde. Allerdings wäre in diesem Fall möglicherweise eine Modellierung der einzelnen Motoren nötig.

Des Weiteren könnten in einer späteren Arbeit die Sensordaten in das Modell eingefügt und die Arena, in der die realen Quadkopter momentan fliegen, in der Simulationsumgebung modelliert werden. Dadurch könnte das Modell auch für die Interaktion zwischen realem und simuliertem Quadkopter genutzt werden.

Verzeichnisse

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Der Quadkopter 'FINken 3'.....	1
Abbildung 2: Schematischer Aufbau des FINken 3 von oben.....	5
Abbildung 3: Bestimmung der strukturellen Identifizierbarkeit.....	7
Abbildung 4: Generelle Struktur des Modells.....	8
Abbildung 5: Modell des Quadkopters in Blockstruktur.....	9
Abbildung 6: Einteilung der Integrationsgrenzen.....	15
Abbildung 7: Einzelschübe in positive x- Richtung.....	23
Abbildung 8: Translation bei Bewegung in positive x- Richtung.....	24
Abbildung 9: Rotation bei Bewegung in positive x- Richtung.....	25
Abbildung 10: Einzelschübe in positive y- Richtung.....	26
Abbildung 11: Translation bei Bewegung in positive y- Richtung.....	27
Abbildung 12: Rotation bei Bewegung in positive y- Richtung.....	28
Abbildung 13: Einzelschübe bei der Gier- Bewegung.....	29
Abbildung 14: Translation bei der Gier- Bewegung.....	29
Abbildung 15: Rotation bei der Gier- Bewegung.....	30
Abbildung 16: Einzelschübe beim Steigen auf eine neue konstante Höhe.....	31
Abbildung 17: Translation beim Steigen auf eine neue konstante Höhe.....	32
Abbildung 18: Rotation beim Steigen auf eine neue konstante Höhe.....	33
Abbildung 19: Gemessene rotatorische Bewegungen des realen Quadkopters.....	34
Abbildung 20: Gemessene translatorische Bewegung des realen Quadkopters.....	35
Abbildung 21: Schübe bei der praktischen Evaluation.....	36
Abbildung 22: Vergleich der simulierten und der gemessenen Rotation des Quadkopters.....	36
Abbildung 23: Vergleich der simulierten und der gemessenen Translation des Quadkopters.....	37
Abbildung 24: Dynamisches Verhalten der Drehzahl.....	38
Abbildung 25: Bestimmung der strukturellen Identifizierbarkeit des Parameters c_t	39
Abbildung 26: Drehung um die x- und y- Achse des Quadkopters.....	vii
Abbildung 27: Drehung um die z- Achse des Quadkopters.....	vii

Literaturverzeichnis

Solve nonlinear least-squares (nonlinear data-fitting) problems - MATLAB lsqnonlin - MathWorks Deutschland. Online verfügbar unter <http://de.mathworks.com/help/optim/ug/lsqnonlin.html>, zuletzt geprüft am 29.02.2016.

Becker, Frank-Michael (2013): Formelsammlung. Formeln, Tabellen, Daten ; Mathematik, Physik, Astronomie, Chemie, Biologie, Informatik ; [bis zum Abitur]. 2. Aufl., 1. Dr. Berlin: Duden Paetec Schulbuchverl.

Bouabdallah, Samir (2007): Design and control of quadrotors with application to autonomous flying. Unter Mitarbeit von Roland Siegwart.

Bronštejn, I. N. (2008): Taschenbuch der Mathematik. [CD-ROM-Ausg. der 7., voll. überarb. und erg. gedr. Ausg.]. Frankfurt: Deutsch (DeskTop).

Czichos, Horst; Hennecke, Manfred (Hg.) (2008): Hütte. Das Ingenieurwissen : Jubiläumsausgabe 150 Jahre Hütte. Akademischer Verein Hütte. 33., aktualisierte Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer.

Dankert, Jürgen; Dankert, Helga (2013): Technische Mechanik. Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik. 7. Aufl. 2013. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Goel, Rahul; Shah, Sapan M.; Gupta, Nitin K.; Ananthkrishnan, N. (2009): Modeling, Simulation and Flight Testing of an Autonomous Quadrotor. Proceedings of ICEAE.

Kemper, Markus (2007): Development of an indoor attitude control and indoor navigation system for 4-rotors-micro-helicopters.

Kim, Jinhyun; Kang, Min-Sung; Park, Sangdeok (2010): Accurate Modeling and Robust Hovering Control for a Quad-rotor VTOL Aircraft. In: *J Intell Robot Syst* 57 (1-4), S. 9–26. DOI: 10.1007/s10846-009-9369-z.

Lunze, Jan (2014): Regelungstechnik. 8., überarb. Aufl. Berlin: Springer Vieweg (Springer-Lehrbuch).

Lutz, Holger; Wendt, Wolfgang (1998): Taschenbuch der Regelungstechnik. 2., überarb. und erw. Aufl. Thun: Deutsch.

Nolting, Wolfgang (2007): Grundkurs Theoretische Physik 1. Klassische Mechanik. 8. Aufl. s.l.: Springer-Verlag (Springer-Lehrbuch).

Pahlke, Christoph Dietrich (2015): Entwurf und Stabilitätsanalyse der Höhenregelung und Wandvermeidung des FINken II Quadropters. Bachelorarbeit.

Puls, Tim; Hein, Andreas; Vörsmann, Peter (2011): Lokalisations- und Regelungsverfahren für einen 4-Rotor-Helikopter. Univ., Diss.--Oldenburg, 2011. 1. Aufl. München: Verl. Dr. kHut (Informatik).

Radde, Karl-Heinz (2001): Routledge Langenscheidts Fachwörterbuch kompakt Technik. Englisch-deutsch, deutsch-englisch. Nachdr. der 2., durchges. Aufl. Berlin: Langenscheidt.

Raue, A.; Kreutz, C.; Maiwald, T.; Bachmann, J.; Schilling, M.; Klingmüller, U.; Timmer, J. (2009): Structural and practical identifiability analysis of partially observed dynamical models by exploiting the profile likelihood. In: *Bioinformatics (Oxford, England)* 25 (15), S. 1923–1929. DOI: 10.1093/bioinformatics/btp358.

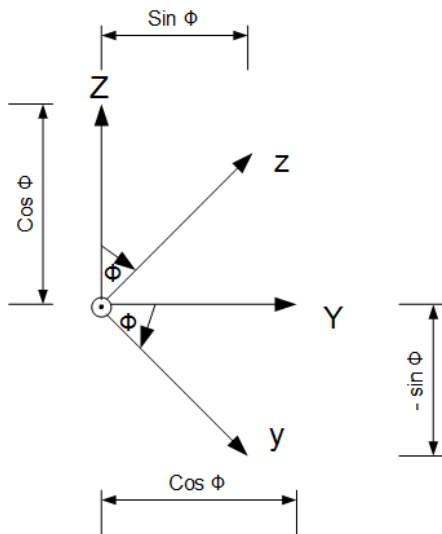
Romberg, Oliver; Hinrichs, Nikolaus (2004): Keine Panik vor Mechanik! Erfolg und Spaß im klassischen "Loser-Fach" des Ingenieurstudiums ; mit Cartoons und 97 Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen. 4., überarb. Aufl. Wiesbaden: Vieweg.

A Anhang

Herleitung der Transformationsmatrix

Für einen Quadrokopter gibt es zwei Arten von Koordinatensystem, einmal das körpereigene, in dieser Arbeit mit den Kleinbuchstaben x,y,z bezeichnet, und das erdfeste Koordinatensystem, hier mit den Großbuchstaben X,Y,Z bezeichnet. Für die Umrechnung zwischen diesen Systemen werden Transformationsmatrizen benötigt.

Drehung um die x - Achse



Drehung um die y - Achse

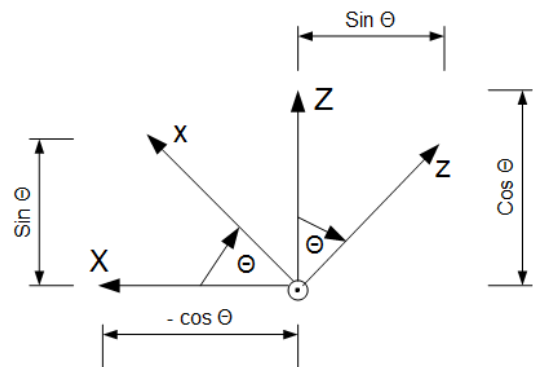


Abbildung 26: Drehung um die x - und y - Achse des Quadrokopters

Drehung um die z - Achse

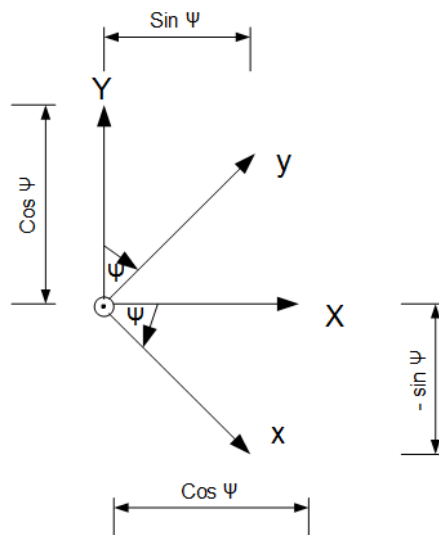


Abbildung 27: Drehung um die z - Achse des Quadrokopters

Aus den Überlegungen in den Abbildungen (26) und (27) ergeben sich die Einzeltransformationsmatrizen für die jeweiligen Achsen.

$$T_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (77)$$

$$T_y = \begin{pmatrix} -\cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (78)$$

$$T_z = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (79)$$

Nun werden die Matrizen (77)-(79) miteinander multipliziert.

$$T = T_z T_y T_x = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (80)$$

Wodurch sich die Gesamttransformationsmatrix T ergibt.

$$T = \begin{pmatrix} -\cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \theta \sin \varphi & \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \theta \sin \varphi & \cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta & -\cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (81)$$

Maße und Gewichte des Quadkopters

Oberer Block	Länge	0,056m
	Breite	0,056m
	Höhe	0,072m
	Gewicht	0,099kg
Unterer Block	Länge	0,065m
	Breite	0,055m
	Höhe	0,041m
	Gewicht	0,132kg
Arme	Länge	0,091m

	Breite	0,018m
	Höhe	0,003m
	Gewicht	0,039kg
Motorblock	Länge	0,029m
	Breite	0,022m
	Höhe	0,0218m
	Gewicht	0,02kg

Zwischenergebnisse für die Massenträgheitsmomente

	1	2	3	4	5	6
J_{xx}	$4,079 \cdot 10^{-4}$	$0,596 \cdot 10^{-4}$	$1,198 \cdot 10^{-4}$	$1,956 \cdot 10^{-4}$	$0,596 \cdot 10^{-4}$	$4,079 \cdot 10^{-4}$
J_{yy}	$2,058 \cdot 10^{-4}$	$0,465 \cdot 10^{-4}$	$2,539 \cdot 10^{-4}$	$1,956 \cdot 10^{-4}$	$0,465 \cdot 10^{-4}$	$2,058 \cdot 10^{-4}$
J_{zz}	$4,033 \cdot 10^{-4}$	$1,646 \cdot 10^{-4}$	$0,792 \cdot 10^{-4}$	$0,495 \cdot 10^{-4}$	$1,646 \cdot 10^{-4}$	$4,033 \cdot 10^{-4}$
J_{xy}	0	0	0	0	0	0
J_{xz}	$0,144 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-8}$	0	0	$-1,4 \cdot 10^{-8}$	$-0,144 \cdot 10^{-4}$
J_{yx}	0	0	0	0	0	0
J_{yz}	0	0	0	0	0	0
J_{zx}	$0,144 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-8}$	0	0	$-1,4 \cdot 10^{-8}$	$-0,144 \cdot 10^{-4}$
J_{zy}	0	0	0	0	0	0

Tabelle 1: Zwischenergebnisse für die Massenträgheitsmomente

Ergebnisse der Normierung für die strukturelle Identifizierbarkeit

Sprung	Zeit(ms)	Schub(%)	Drehzahl(1/m)	Drehzahl normiert
Von 0 auf 10	436880	0	0	0
	436980	10	0	0
	437081	10	2340	0,6610169492
	437182	10	2940	0,8305084746
	437283	10	3540	1
	437384	10	3540	1
Von 10 auf 20	447085	10	3540	0
	447186	20	4740	0,5
	447287	20	5940	1
Von 20 auf 30	457291	20	5940	0
	457392	30	6480	0,3103448276
	457493	30	7680	1
Von 30 auf 40	467497	30	7680	0
	467599	40	8820	0,475
	467700	40	10080	1
Von 40 auf 50	477603	40	10080	
	477805	50	11280	0,6666666667
	477906	50	11880	1
Von 50 auf 60	487910	50	11880	0
	488011	60	12420	0,4736842105
	488112	60	13020	1
Von 60 auf 70	498116	60	13020	0
	498217	70	14220	0,6666666667
	498319	70	14700	0,9333333333
	498420	70	14820	1
Von 70 auf 80	508323	70	14820	0
	508424	80	15420	0,3333333333
	508525	80	16020	0,6666666667
	508626	80	16620	1
Von 80 auf 90	518327	80	16620	0
	518630	90	17820	0,6896551724
	518731	90	17820	0,6896551724
	518832	90	18360	1
Von 90 auf 100	528735	90	18360	0
	528836	100	18960	0,3333333333
	528937	100	19560	0,6666666667
	529039	100	19380	0,5666666667
	529140	100	20160	1

Tabelle 2: Drehzahlnormierung für die strukturelle Identifizierbarkeit