# 10. Übungsblatt

## Aufgabe 40 Hopfield-Netze: Lösen von Optimierungsproblemen

Gegeben sei eine Folge $F = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ganzer Zahlen. Wir nehmen vereinfachend an, dass mindestens eine dieser Zahlen nicht negativ ist. Gesucht ist die maximale Teilsumme dieser Folge, d.h. das Maximum der Summen von Teilfolgen der Folge $F$, wobei wir unter einer Teilfolge der Folge $F$ eine Folge $F_{ij} = (a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j)$ mit $1 \leq i \leq j \leq n$ verstehen. Wir suchen also

$$\mathrm{mts}(F) = \max_{1 \leq i \leq j \leq n} \sum_{k=i}^{j} a_k.$$

Konstruieren Sie ein Hopfield-Netz zur Lösung dieses Optimierungsproblems!

Hinweis: Sie müssen eine geeignete Energiefunktion finden.

## Aufgabe 41 Optimaler Hyperebenenklassifikator - SVM

a) Zeigen Sie, dass für zwei linear-trennbare Klassen von Punkten im Raum $\mathbb{R}^n$ die Maximierung des Abstandes zw. diesen Klassen (engl. *margin*) identisch ist mit der Minimierung der Norm $\|w\|$ des Normalenvektors $w$ der Trennebenen $\{x \in \mathbb{R}^n : x^T w - b = 0\}$.

b) Wie kann dieses Minimierungsproblem angepasst werden, um auch sich überlappende Klassen voneinander zu trennen?

c) Informieren Sie sich über den sogenannten Kernel-Trick. Was besagt er und wo kommt er zum Einsatz?

d) Wie kann das Optimierungsproblem einer linearen SVM angepasst werden, um auch nichtlineare Lösungen zu finden?

**Bitte beachten Sie auch die folgende Seite!**

## Aufgabe 42 Vapnik-Chervonenkis-Dimension

a) Informieren Sie sich über die Vapnik-Chervonenkis-Dimension (VC-Dimension). Was besagt diese Größe und warum spielt sie für das Erlernen einer Funktion aus Datenpunkten (z.B. durch ein neuronales Netz) eine Rolle?

b) Wie groß ist die VC-Dimension einer Hyperebene im Raum $\mathbb{R}^n$? Verdeutlichen Sie Ihre Überlegungen mit Beispielen für $n = 2$.

c) Zeigen Sie dass die VC-Dimension eines Dreieck-Klassifikators, welcher alle Punkte innerhalb des Dreiecks positiv und Punkt außerhalb des Dreiecks negativ klassifiziert, mindestens eine VC-Dimension von 6 (untere Schranke) hat, aber diese kleiner als 8 (obere Schranke) sein muss.

   **Hinweis:** Für das zeigen der oberen Schranke reicht es anhand einer Skizze eine Begründung zu geben, dass nicht alle möglichen Belegungen durch den gegebenen Klassifikator erfolgreich klassifiziert werden köennen.

d) Informieren Sie sich über die VC-Dimensionen der in der Vorlesung besprochenen Kernel. Was sagt uns dies über die Berechnungsfähigkeit einer SVM.

## Aufgabe 43 Zusatz - Vapnik-Chervonenkis-Dimension

a) Die Indikatorfunktion $I(f(x))$ ist definiert als 1, falls $f(x) > 0$, und $-1$ sonst. Zeigen Sie, dass die Menge der Funktionen $\{I(\sin(\alpha x) > 0)\}$ die folgenden Punkte im eindimensionalen Raum für beliebige $l$ trennen kann:

$$z_1 = 10^{-1}, \ldots, z_l = 10^{-l}.$$

   Das heißt, zeigen Sie, dass die VC-Dimension dieser Klasse von Funktionen unendlich ist.
   Hinweis: Es genügt dazu

$$\alpha = \pi(1 + \sum_{i=1}^{l} \frac{(1 - y_i)10^i}{2})$$

   geschickt zu wählen und zu zeigen, dass für beliebige $l \in \mathrm{N}$ und beliebige Labels

$$y_k \in \{-1, 1\}, \forall 1 \leq k \leq l$$

   die Indikatorfunktion das gewünschte Label liefert.